THEMATISCHE GLIEDERUNG DES SEMINARS MODULFORMEN

DR. ERIC HOFMANN

1. Elliptische Funktionen I

Stichworte: Gitter, Gruppenoperationen, Periodentorus, Homothetien von Gittern, Elliptische Funktionen, Abelsche Theoreme, Weierstraß'sche $\wp$-Funktion, Gitterfunktionen (Eisensteinreihen)

Dieser Vortrag ist zum Teil eine Wiederholung der Funktionentheorie 2. Allerdings rückt hier der Begriff der Gruppenoperation stärker in den Vordergrund. Die Operation der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der Menge der Gitter erlaubt es uns jedes Gitter in der Form $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ zu schreiben, mit τ aus der oberen Halbebene $\mathbb{H}$. Außerdem wollen wir den Periodentorus $\mathbb{C}/\Lambda$ etwas genauer in Augenschein nehmen. Die Grundbegriffe der Theorie elliptischer Funktionen sollen ebenfalls kurz wiederholt werden.

Literatur: [Koh], [Wi] Abschnitte 2.1 und 2.2, 2.3 (teilweise)

2. Elliptische Funktionen II

Stichworte: Weierstraß-DGL, Komplexe elliptische Kurven, (algebraische Kurven als 'Verschwindemengen' projektive Kurven skzziert), Additionstheorem, Diskriminante (evtl. j-Funktion als Doppelverhältnis)

Man kann die Differentialgleichung der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion als eine polynomiale Gleichung in zwei Veränderlichen auffassen, als solche definiert sie ein ebene (affine) algebraische Kurve, genauer gesagt eine *komplexe elliptische Kurve*.

In diesem Vortrag soll erklärt werden, wie die Weierstraß-DGL eine Bijektion zwischen dem Periodentorus und einer projektiven Kurven vermittelt, der (komplexen) elliptischen Kurven zum Gitter L. Hierzu soll zunächst kurz skizziert werden, was man unter einer (ebenen) affinen algebraischen Kurve und unter einer projektiven Kurve versteht. Man kann dazu beispielsweise ähnlich vorgehen wie in [FrBu], Anhang zu V.3.

Solche elliptischen Kurven haben eine wunderbare Eigenschaft: Man kann auf ihnen eine Gruppenstruktur einführen, die sich auch noch sehr einfach geometrisch veranschaulichen lässt. Mit der Bijektion zwischen

dem Periodentorus und einer elliptische Kurve lässt sich dieses Gruppengengesetz aus dem Additionstheorem der $\wp$-Funktion herleiten. Außerdem soll natürlich auch gezeigt (und gezeichnet) werden, wie die geometrische Addition von Punkten einer elliptischen Kurve mittels Sehnen-Tangenten-Konstruktion funktioniert.
Literatur: [Wi], Abschnitte 2.2 und 2.3; Neben [FrBu], Kapitel V, inbesonder V.3, kann man auch [KK] Kapitel I.5 zu Rate ziehen.

3. Wiederholung Modulformen zu $\Gamma(1)$

Stichworte: SL_2, bzw GL_2-Operation, elliptische, parabolische und hyperbolische Punkte, (Fundamentalgebiet), Eisensteinreihen E_k für $k > 2$, k gerade, Valenzformel Dimensionsformeln, Struktursatz, Δ-Funktion

Dieser Vortrag ist größtenteils eine Wiederholung aus der Funktionentheorie 2, wobei wir hier die Gruppenoperation vielleicht etwas bewusster betrachten wollen.
Literatur: : [Koh], [Wi] oder auch [FrBu] Kapitel VI.

4. Modulformen höherer Stufe, Kongruenzuntergruppen

Stichworte: Kongruentuntergruppen, $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$, Spitzen, Multiplikatorsysteme, Altformen

Dieser Vortrag bezieht sich auf Abschnitt 2.5 (ohne 2.5.5) in [Wi]. Es soll der Begriff 'Kongruenzuntergruppe von $SL_2(\mathbb{Z})$' eingeführt werden, und speziell die Hauptkongruenzuntergruppen $\Gamma(N)$ sowie $\Gamma_1(N)$ und $\Gamma_0(N)$ für $N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$. Will man nun Modulformen und -funktionen bezüglich einer Kongruenzuntergruppen Γ definieren, muss man noch den Begriff der *Spitzen* eingeführen. Statt nur in dem einen Punkt ∞ (als Vertreter von $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ unter $SL_2(\mathbb{Z})$-Operation) muss man das Verhalten einer Funktion nun an Vertretern sämtlicher Γ-Bahnen von Randpunkten betrachten, wenn man z.B. für eine Modulform überall Holomorphie fordert.

5. Eisensteinreihen vom Gewicht 2

Stichworte: Fourierentwicklung von G_2, nicht-holomorphe Eisensteinreihe $G_{2,\epsilon}$, Transformationsverhalten (quasi-modulare Formen), $G_{2,N}$ für $\Gamma_0(N)$.

Man kann auch eine Eisensteinreihe mit Gewicht 2 definieren. Da ihre Fourierentwicklug nicht absolut konvergent ist, muss man etwas aufpassen, siehe etwa [FrBu], VII.1, außerdem transformiert sie sich auch nicht wie eine Modulform (eine Modulform vom Gewicht 2 zu $\Gamma(1)$ müsste ja auch verschwinden ..), näheres siehe auch [Za], sie stellt ein Beispiel für

eine Verallgemeinerung des Begriffs der Modulform dar, eine, nach Zagier, 'quasi-modulare Form' . Für $N > 2$ kann man aber mittels eines kleinen Tricks Eisensteinreihen vom Gewicht 2 definieren, die sehr wohl Modulformen sind, aber eben bezüglich $\Gamma_0(N)$, siehe [Wi], 2.5.5.
Literatur: [FrBu], Kapitel VII.1, [Za], Abschnitt 2.3, [Wi] Abschnitt 2.5.5

6. Beispiele mit unendlichen Produktenwicklungen

Stichworte: η-Funktion, η-Multiplikatorsystem, (elliptische Funktionen: σ und Weierstraß' ζ-Funktion), unendliche Produktentwicklung der Δ-Funktion, (j-Invariante)

In diesem Vortrag lernen wir Beispiele für Modulformen kennen, die über einen undenliche Produktentwicklung verfügen. Die Dedekindsche η-Funktion lässt sich am einfachsten über eine solche Produktenwicklung definieren. Sie transformiert sich mit Gewicht $1/2$ und einem Multiplikatorsystem. Wendet man auf η^{24} die Dimensionsformel an, so findet man, dass η^{24} gleich der bereits bekannten Δ-Funktion sein muss. Man hat somit für diese einen unendliche Produktentwicklung gefunden. Es gibt auch noch einen gänzlich anderen Weg, die unendliche Produktentwicklung von Δ nachzuweisen, er kommt aus der Theorie elliptischer Funktionen, vgl. eta [KK] Kapitel I. Es wäre wünschenswert, hierauf auch kurz einzugehen, sofern es die Zeit erlaubt.

In diesem Zusammenhang kann man auch die j-Invariante einführen[1]. Sie ist eine Modulfunktion vom Gewicht 0, die in der Theorie elliptischer Kurven von großer Bedeutung ist.
Literatur: [Wi], 2.5, etwas ausführlicher auch bei [KK] Kapitel III.6.

7. Theta-Reihen und halbganzes Gewicht

Stichworte: Theta-Reihen und Theta-Transformationsformel (Wh.), Modulformen mit halbganzem Gewicht und Θ-Multiplikatorsystem, $\Gamma_0(4)$ Homomorphismus zu $\Gamma(2)$.

Theta-Reihen sind schon aus der Vorlesung Funktionentheorie 2 bekannt. Dort haben wir auch eine Satz kennen gelernt, der uns sagt, wann eine Thetafunktion eine Modulform vom ganzzahligem Gewicht ist.

Im Allgemeinen jedoch sind Thetafunktionen Modulformen von halbganzzahligem Gewicht, mit einem Multiplikatorsystem. – Ein solches Phänomen ist uns zwar bereits bei der Eta-Funktion begegnet, wir wollen es hier aber etwas systematischer betrachten.
Literatur: [Wi] 2.6, [Koh] evtl. auch [FrBu] Kapitel VI.4

[1]Auch $j(\tau)$ verfügt über eine unendliche Produktentwicklung. Sie ist aber nicht gerade einfach zu finden ...

Zum besseren Verständnis des halbganzzahligen Gewichtes finde ich [Kob], Kapitel IV.1 sehr gelungen (geht allerdings für den Vortrag zu weit).

8. Fundamentalbereich und Kompaktifizierung

Stichworte: Wh. Fundamentalbereich, (evt. $\mathbb{H} \simeq \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$), Kompaktifizierung, weitere Beispiele (z.B. für die Thetagruppe)

In diesem Vortrag soll zunächst die Konstruktion des Fundamentalbereichs für $\Gamma(1)$ in Erinnerung gerufen werden und anschließend untersucht werden, wie sich dieser um die 'fehlenden' Punkte aus $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ergänzen lässt, so dass der Quotient $X(1) = \Gamma(1)\backslash\mathbb{H}$, die sog. *Modulkurve*, zu einer kompakten Riemannschen Fläche wird. (Für $\Gamma(1)$ ist $X(1) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Für Kongruenzuntergruppen treten aber auch Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ auf.)

Außerdem soll kurz auf die Situation für allgemeinere Untergruppen eingegangen werden. Ein relative leicht zu bestimmendes Beispiel ist der Fundamentalbereich der sog. Thetagruppe.

Literatur: [Wi], Kapitel 3.1 (speziell 3.1.1 und 3.1.2), sowie 3.2.1. Vgl. auch [Mi] S.30f. Zum Fundamentalbereich der Thetagruppe siehe [FrBu], Anhang zu VI.5.

9. Die Modulkurve $X(N)$ als 'Modul-Raum'

Stichworte: Modulkurve, Moduli-Interpretation

Punkten der oberen Halbebe lassen sich Gitter zuordnen, modulo Homothetien entspricht jeder Punkt des Fundamentalbereichs zu $\Gamma(1)$ einer Äquivalenzklasse von Gittern. (Dass wir so Modulformen als Gitterfunktionen interpretieren können, haben wir bereits gesehen.)

Damit entspricht aber jeder Punkt τ in $\mathscr{F}$ einer Äquivalenzklasse von Tori $\left(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau\right)\backslash\mathbb{C}$, also elliptischer Kurven. Wir haben somit eine interessante Interpretation von $X(1)$ gefunden: Seine Punkte parametrisieren Isomorphieklassen von elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$. (Dabei ist $X(1)$ selbst auch eine Riemannsche Fläche bzw. Kurve über $\mathbb{C}$, wenn auch natürlich keine elliptische!)

Wie sich nun auch die Modulkurven zu Kongruenzuntergruppen $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(N)$ deuten lassen, soll in diesem Vortrag (ebenfalls) erläutert werden.

Literatur: [Wi] 3.2.2, auch [DS] Kapitel 1.5

10. Modulformen als Differentialformen

Stichworte: Definition m-Differentialformen (symmetrische Algebra), Divisoren, Anwendungen

Dieser Vortrag bezieht sich auf Kapitel 3.3 von [Wi]. Die Begriffe in 3.1, sowie der Zusammenhang zwischen Modulformen und Differentialformen sollten möglichst verständlich dargesellte werden.

Je nach Zeit kann man entscheiden, auf welche Anwendungen (Geschlecht von Modulkurven, Dimensionsformel, ...) man näher eingehen will. Jeweils benötigte Sätze wie Riemann-Hurwitz oder Riemann-Roch können als Import behandelt werden.
Literatur: [Wi], 3.3.1 sowie 3.3.2 und 3.3.3 (sinnvolle Auswahl treffen)

11. Hecke-Korrespondenzen

Stichworte: Hecke-Korrespondenzen, Hecke-Algebra, Doppelnebenklassenoperatoren, $T(p)$ und $T(n)$, Diamanten-Operatoren $\langle n\rangle$, Eigenformen

Vereinfacht ausgedrückt führt die Hecke-Theorie Operatoren ein, die auf dem Raum der Modulformen operieren und bestimmten algebraischen Relationen genügen, durch welche die Menge der Hecke-Operatoren selbst eine Ringstruktur erhält.

Der Hecke-Ring zu $\Gamma(1)$ wird von Hecke-Operatoren $T(n)$ und den sogenannten Diamanten-Operatoren $\langle n\rangle$ erzeugt (letztere werden häufig auch als R_n notiert, z.B. in [Do]).

Die Theorie der Hecke-Operatoren lässt sich auf recht unterschiedliche Arten einführen. Der strukturell klarste Einstieg ist es, sie als Korrespondenzen von Gittern einzühren, woraus man sehr leicht die Relationen, welche zwischen den Hecke-Operatoren $T(n)$ und $\langle n\rangle$ bestehen, erhält, sowie eine Darstellung durch Matrizen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Bei [Wi] werden sie als Doppelnebenklassenoperatoren eingeführt, was ebenfalls legitim ist, in diesem Fall ist es aber wünschenswert, den Zusammenhang zu Korrespondenzen von Gittern kurz zu skizzieren.

Unter einer *Eigenform* verstehen wir eine Modulform, die Eigenfunktionen eines Hecke-Operators ist. Besonders interessant sind Funktionen, die für alle Hecke-Operatoren Eigenformen sind, siehe auch Vortrag 12. Beispiele für (simultane) Eigenformen sind die Deltafunktion $\Delta(\tau)$ (aus Dimensionsgründen ist klar, dass sie eine simultane Eigenform für alle Hecke-Operatoren ist) und die Eisensteinreihen E_k für $k \geq 4$.

Aufgrund der Relationen zwischen den Hecke-Operatoren $T(n)$ ergeben sich für eine Eigenform multiplikative Relationen zwischen deren Fourier-Koeffizienten, siehe auch Vortrag 14
Literatur: Kapitel 3.4 von [Wi]; sehr gut geeignet (und etwas vollständiger) ist [Do], lecture 11 (ohne 11.5)

Vielleicht ein wenig zu umfangreich: [DS] Kapitel 5.1 bis 5.3.

12. Petersson-Theorie, Simultane Eigenformen

Man führt nun auf dem Raum der Modulformen ein hermitesches Skalarprodukt ein, das sogenannte *Petersson-Produkt*:

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathscr{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k dv,$$

wobei $z = x + iy \in \mathbb{H}$ und $f, g \in \mathscr{M}_k(\Gamma)$ und dv das *invariante Maß* $dv = y^{-2}dx\,dy$ bezeichnet. (Das Integral konvergiert, wenn f oder $g \in \mathscr{S}_k(\Gamma)$.)

Es stellt sich heraus, dass die Hecke-Operatoren selbstadjungiert bezüglich dieses Skalarprodukts sind. Als Anwendung des Spektralsatzes folgt nun, dass es eine Basis für den Raum der Modulformen gibt, welche aus 'simultanen Eigenformen', also Eigenfunktionen für alle $T(n)$ besteht.

Ein Beispiel für simultane Eigenformen kennen wir ja bereits: Die Eisensteinreihen. Es lässt sich nun zeigen, dass die Eisensteinreihen das orthogonale Komplement zu den Spitzenformen bezüglich des Petersson-Produkts sind.

Literatur: Z.B. [KK], Kapitel IV §3, [Do] lecture 11.5 (S. 116f)

13. Hecke-Theorie für Kongruenzuntergruppen, Neuformen

Bisher haben wir die Hecke-Theorie hauptsächlich für $\Gamma(1)$ behandelt. Lässt man Kongruenzuntergruppen zu, so wird die Sache etwas komplizierter.

Zunächst geht alles noch gut: Betrachtet man $\Gamma_1(N)$ und Hecke-Operatoren $T(n)$ mit $\mathrm{ggT}(n,N) = 1$ so läuft alles fast wie gewohnt ab, und der Raum $\mathscr{S}_k(\Gamma_1(N))$ hat eine Basis von simultanen Eigenformen für diese $T(n)$s.

Will man zu einer umfassenderen Aussage gelangen, so muss man genau unterscheiden, welche Spitzenformen *Altformen* sind, also bereits schon in $\mathscr{S}_k(\Gamma_1(M))$ für ein $M \mid N$ liegen. Das orthogonale Komplement des Raums $\mathscr{S}_k(\Gamma_1(N))^{alt}$ bezüglich Petersson-Produkt ist der sogannte Raum der *Neuformen*, $\mathscr{S}_k(\Gamma_1(N))^{neu}$. Diese Zerlegung wird von sämtlichen Hecke-Operatoren stabilisiert. Mit Hilfe der Neuformen kann man nun recht explizit eine Basis des Raums $\mathscr{S}_k(\Gamma_1(N))$ angeben, die aus simultanen Eigenformen für *alle* Hecke-Operatoren besteht.

Ein weitere wichtiger Nutzen der Neuformen-Theorie sei hier mit Blick auf den letzten Vortrag nur angedeutet: Damit die ihr zugeordnete L-Reihe sowohl eine Funktionalgleichung (und damit eine meromorphe Fortsetzung) als auch eine Eulerproduktentwiclung hat, muss eine Spitzenform in $\mathscr{S}_k(\Gamma_1(N))$ (für $N > 1$) zugleich Eigenform für alle $T(p)$ sein und auch noch für einen weiteren Operator, die sogenannte *Atkin-Lehner-Involution* w_N.

Literatur: [DS] Kapitel 5 ab 5.6, Milne V.4.

Bemerkung: Das Ziel des Vortrags ist, es einen Einblick zu geben, je nach Wunsch kann auch auf Details näher eingegangen werden. Rücksprache mit mir ist eventuell sinnvoll.

14. L-Reihen für Eigenformen, Euler Produkte

Stichworte: Dirichlet-Reihen, Funktionalgleichung, Euler-Produkte, L-Reihen für simultane Eigenformen (Spitzenformen und Eisensteinreihen)

Unter einer Dirichlet-Reihe (oder L-Reihe) versteht man eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad \text{mit} \quad s \in \mathbb{C}.$$

Ist eine Dirichlet-Reihe für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent, so gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ und eine Halbebene $\{s \in \mathbb{C}; \Re s > C\}$, auf welcher diese absolut konvergiert. Unter bestimmten Bedingungen genügt die durch eine solche Reihe definierte Funktion einer Funktionalgleichung, durch welche sie meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

Sind die a_n multiplikativ, kann man die Dirichlet-Reihe als Euler-Produkt schreiben, das bekannteste Beispiel ist hier die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Ihre Konvergenzhalbebene ist durch $\Re s > 1$ gegeben.

Man ordnet nun einer normierten (d.h. $c(1) = 1$) Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{n>0} c(n) q^n$ die L-Reihe

$$\sum_{n>0} \frac{c(n)}{n^s}$$

zu. Die multiplikativen Relationen zwischen den Fourierkoeffizenten einer Eigenform erlauben es, auch solche L-Reihen als Euler-Produkte zu schreiben.

Weiter besitzen diese Dirichlet-Reihen eine Funktionalgleichung und dadurch eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Die für den Beweis eingesetzten Techniken (Mellin-Transformation, Eigenschaften von Gamma- und Theta-Funktionen) treten ähnlich in der Theorie der Zeta-Funktionen auf, haben jedoch auch weit über die analytische Zahlentheorie hinausreichende Bedeutung.

Literatur Gut ist [Do]. Hier werden Dirichlet-Reihen, speziell für Eigenformen (für $\Gamma(1)$) in §12, bis einschließlich 12.4 behandelt. Man auch [KK] IV, §4 (insbesondere 4.4 und 4.8) zu Rate ziehen – ziemlich ausführlich, aber alle Inhalte werden darin behandelt. Über Dirichlet-Reihen allgemein kann man sich z.B. in [FrBu], VII.§§2, 3 informieren.

LITERATUR

[DS] Diamond, Shurman; A First Course in Modular Forms; Springer 2005

[Do] Dolgachev; *Modular Forms*, Vorlesungsskript, 1998; `http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/lecturenotes.html`

[FrBu] Freitag, Busam; Funktionentheorie 1; Springer Verlag

[KK] M. Koecher, A. Krieg; *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer 2007

[Kob] Koblitz; Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms; Springer Verlag; 1993

[Koh] Kohnen; Funktionentheorie 2; Vorlesung

[Mi] Milne; Elliptic Curves; BookSurge 2006; online verfügbar unter `www.jmilne.org`.

[Wi] Wiese; Modulformen 1; Volesungsskript

[Za] Bruiner, van der Geer, Harder, Zagier; The 1-2-3 of Modular Forms; Springer 2008