Thematische Gliederung des Seminars elliptische Modulformen

Dr. Eric Hofmann

29. April 2011

1 Einführung

2 Eisensteinreihen und Diskriminante

Teilweise wiederholt dieser Vortrag bereits aus der Funktionentheorie bekanntest: Die (normierten) Eisensteinreihen E_k werden zunächst mit Hilfe *Petersson-Operators* („Strich-Operator") als *Symmetrisierung* der Operation einer Untergruppe von $\Gamma(1)$ auf der konstanten Funktion 1 definiert:

$$E_k(z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma(1)} 1 \mid_k \gamma.$$

(Dies ist ein Beispiel für eine deutlich allgemeineres Konstruktionsprinzip, welches zu *Poincaré-Reihen* führt.)

Eine weitere Definition, (10) auf S.14 in [123], ist wohl die in Funktionentheorie-Vorlesungen geläufigere[1]: Sie führt die Eisensteinreihen G_k ein als

$$G_k(z) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d) \neq (0,0)}} \frac{1}{(cz+d)^k}, \qquad \text{für} \quad k > 2 \quad \text{und (ohne Einschränkung) gerade.} \tag{1}$$

Aus dieser Definition ergibt sich, dass man einen Faktor $\zeta(k)$ ausklammern kann, wobei hier ζ die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet, diesen erkennt man als den Wert von $G_k(z)$ an der Spitze $i\infty$ und als Proportionalitätsfaktor zwischen G_k und E_k. Außerdem werden in [123] auch noch durch eine weitere Normierung die Eisensteinreihen $\mathbb{G}_k$ definiert.

Als wichtige Strukturaussage ergibt sich nun die Erkenntnis, dass der Ring $\mathcal{M}_*(\Gamma(1))$ von den Eisensteinreihen E_4 und E_6 erzeugt wird. (Am Rande sei erwähnt, dass man hieraus mit der $k/12$-Formel einen Beweis der Dimensionsformel für $\mathcal{M}_k(\Gamma(1))$ folgern kann.[2])

Nun gilt es, die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen zu bestimmen, wie dies in [123], S. 16 durchgeführt wird (man findet dies auch z.B. in [FB] und anderswo, man sollte jedoch auf die Normierungskonventionen achten).

---

[1] Man beachte allerdings den abweichenden Vorfaktor 1/2, der z.B. in [FB] nicht auftritt.

[2] Im Gegensatz zu dem, was ich bei der Einführung leichtfertig behauptet habe.

Weiter lässt sich nun, analog zur Situation für $k > 2$ auch die Eisensteinreihe E_2 definieren, wobei man hier von der Fourierentwicklung ausgeht. (Benutzt man hingegen (1) kommt es auf die Reihenfolge der Summation an, siehe hierzu auch [FB].) Diese Eisensteinreihe ist jedoch keine Modulform mehr, sie liefert eine Beispiel für das, was man nach Zagier als *Quasimodulare Form* bezeichnet.

Als Anwendung der Eisensteinreihen kann man die *Diskriminantenfunktion* $\Delta(z)$, welche durch das unendliche Produkt

$$\Delta(z) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

gegebene ist als (die eindeutige) Spitzenform vom Gewicht 12 identifizieren. Als Beispiel für den obigen Struktursatz lässt diese sich auch in der Form

$$\Delta(z) = \frac{1}{1728} \left(E_4^3 - E_6^2 \right)$$

schreiben.

Literatur: [123] I.§2, [FB] VII.1.

Wesentliche Inhalte: Definition der E_k und G_k, Struktursatz für $\mathscr{M}_*(\Gamma(1))$, Fourierentwicklung der E_k, Transformationsverhalten von E_2 und Einführung von $\Delta(z)$. (Es gilt hier, insbesondere im Bezug auf §2.3 und §2.4 eine sinnvolle Auswahl zu treffen und eventuell Details der Beweise zu verkürzen.)

3 Theta-Funktionen

Allgemein lassen sich Theta-Funktionen so definieren, dass man einer positiv definiten quadratischen Form $\mathscr{Q} : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ die Reihe

$$\Theta_{\mathscr{Q}}(z) := \sum_{x_1,\dots,x_m \mathbb{Z}} q^{\mathscr{Q}(x_1,\dots,x_m)}$$

zuordnet, welche dann eine Funktion auf $\mathbb{H}$ definiert (siehe [123], S.31f). Wir wollen uns hier auf den Fall $m = 1$ beschränken. Beispiele für Theta-Funktionen in einer Variable werden in §3.1 behandelt. Das Grundbeispiel ist hier Jacobische Theta-Funktion

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_{n>0} q^{n^2}.$$

Ihr Transformationsverhalten lässt sich durch Poissonsummation untersuchen. Man stellt fest, dass es für die Theta-Funktionen notwendig ist, die Definition von Modulformen etwas zu erweitern: Man muss Multiplikatorsysteme einführen, um Gewicht 1/2 (allgemeiner halbganzzahliges Gewicht) zuzulassen, außerdem hat man es mit der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(4)$ zu tun.

Als klassische Anwendungen ergeben sich Sätze über die Darstellungsanzahlen von natürlichen Zahlen als Summen von zwei, vier und acht Quadraten.

Schließlich kann man $\theta(z)$ nach Jacobi als sogenannten „Thetanullwert“ einer Funktion $\theta(z,u)$ in zwei Variablen auffassen. Ähnlich lassen sich auch weitere Thetafunktionen $\theta_2(z)$, $\theta_4(z)$ einführen. Der Isomorphismus $\Gamma_0(4) \simeq \Gamma(2)$ erlaubt es außerdem, Thetafunktionen θ_M und θ_F für die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(2)$ zu definieren.

Der gesamte Abschnitt ist in [123] relativ knapp gehalten, gleichzeitig werden viele mögliche Anwendungen skizziert, man kann hierzu aber noch [FB] zu Rate ziehen, andere Quellen wie [Do] §3 - §5 sind ebenfalls gut.

Literatur [123], §3.1; [FB], VI.4 (Theta-Funktionen nach Jacobi, Transformationsverhalten, Thetanullwerte), VI.5 (bis 5.5 Multiplikatorsysteme), VII.1 (zur Darstellungen von natürlichen Zahlen als Summe von acht bzw. vier Quadraten)

Wesentliche Inhalte Transformationsverhalten der (Jacobischen) Thetafunktion (Multiplikatorsysteme und Gewicht $1/2$ zu $\Gamma_0(4)$), Satz von Lagrange. Die verwandten Thetafunktionen oder das Thema Thetanullwerte sollten zumindest kurz erwähnt werden.

(Es bieten sich hier einige Möglichkeiten, zu entscheiden, auf welche Details man mehr oder weniger Wert legen will. Eventuell ist eine kurze Rücksprache mit mir sinnvoll.)

4 Hecke Theorie für $\Gamma = \Gamma(1)$

Die nächsten beiden Vorträge beziehen sich auf §4.1 in [123]. Leider ist die Darstellung hier sehr kompakt und greift auch etwas zu kurz, da die Theorie der Petersson-Skalarprodukte nur angedeutet wird.

Grob gesprochen führt die Hecke-Theorie Operatoren auf dem Raum der Modulformen ein, welche bestimmten algebraischen Relationen genügen. Aufgrund dieser Relationen zeigt sich, dass eine *(simultane) Eigenform*, das heißt eine Modulform mit $T(n)f = \lambda f$, für alle Hecke-Operatoren $T(n)$, eine Fourierentwicklung besitzt, deren Koeffizienten *multiplikativ* sind, d.h. $f(z) = \sum c(n)q^n$ mit $c(nm) = c(n)c(m)$ für $\mathrm{ggT}(m,n) = 1$.

Mittels der Petersson-Theorie zeigt sich nun, dass der Raum der Modulformen über eine Basis von simultanen Eigenformen verfügt.

4.1 Hecke-Operatoren und Hecke-Algebra

Der strukturell klarste Einstieg in die Theorie der Hecke-Operatoren geschieht darüber sie als Korrespondenzen auf Gittern einzuführen, hieraus erhält man auch eine Beschreibung durch Matrizen aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ und die Relationen, welche zwischen den Hecke-Operatoren $T(n)$ und R_n bestehen, ergeben sich zwanglos. Der Preis hierfür ist es, den etwas abstrakten, algebraischen Begriff der Korrespondenz als vernünftige Formalisierung der Idee einer „mehrdeutigen“ Abbildung in Kauf nehmen zu müssen.

Um nun zu einer Operation auf dem Raum der Modulformen zu gelangen, wird es notwendig, einen Aspekt in der Vordergrund zu rücken, der bislang nur von untergeordneter Bedeutung war:

Jeder Punkt τ der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ lässt sich mit einem Gitter $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ identifizieren, umgekehrt lässt sich jedes Gitter $\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ (mit $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$) in der Form $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ mit $\tau \in \mathbb{H}$

schreiben. Dadurch lassen sich Modulformen als homogene Funktionen auf der Menge $\mathscr{L}$ der Äquivlenzklassen von Gittern schreiben.

So erhält man eine Beschreibung der Hecke-Operatoren als Endomorphismen auf den Räumen $\mathscr{M}_k(\Gamma)$ und kann explizit angeben, wie ein Hecke-Operator auf der Fourier-Entwicklung einer Modulform $f \in \mathscr{M}_k(\Gamma)$ wirkt. Hiermit lässt sich nun aufzeigen, welche Eigenschaften *Eigenformen* aufweisen müssen. als erste Beispiele hat man die normierten Eisensteinreihen E_k und die Diskriminantenform Δ.

Literatur: Zu diesem Thema empfehle ich die [Do], §11 bis einschließlich Seite 115. Es genügt jedoch, den Begriff der Korrespondenz definieren und vernünftig motivieren zu können, die Ausführungen auf S. 109-110 sind etwas zu ausführlich. (Zum besseren Verständnis siehe auch [M] S.75f.)

Inhalte: Definition der Hecke-Korrespondenzen $T(n)$ und R_c; Relationen in der Hecke-Algebra; Beziehung zwischen $\mathscr{M}_k$ und Funktionen auf $\mathscr{L}$; die Hecke-Operatoren $T(n)$ auf $\mathscr{M}_k(\Gamma)$. Konsequenzen für die Fourierentwicklung von Eigenformen; E_k und Δ als Eigenformen.

4.2 Petersson-Skalarprodukt

Dieses Thema rückt nun wieder die Analysis in den Vordergrund. Man führt auf dem Raum der Spitzenformen ein Skalarprodukt ein: Genauer definiert man das *Petersson-Skalarprodukt* als

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathscr{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k dv,$$

wobei $z = x + iy \in \mathbb{H}$ und $f, g \in \mathscr{M}_k(\Gamma)$ und dv das *invariante Maß* $dv = y^{-2}dx\,dy$ bezeichnet. Das Integral konvergiert, wenn f oder $g \in \mathscr{S}_k(\Gamma)$. Das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist hermitesch und positiv definit. Dass die Heckeoperatoren $T(n)$ selbstadjungiert bezüglich dieses Skalarprodukts sind, ist das wesentliche Ergebnis der Hecke-Petersson Theorie. Auf Grund dessen verfügt der Raum $\mathscr{M}_k(\Gamma)$ der Modulformen über eine Basis von simultanen Eigenformen.

Literatur: Bei diesem Thema ist [Do] etwas knapp, es lohnt nämlich einige technische Gesichtspunkte, wie etwa die Eigenschaften des invarianten Maßes und die Technik der Integration über invariante Funktionen genauer zu betrachten. Darum ist hier [KK], IV.3 geeigneter.

Inhalte: Invariantes Maß, Definition des Petersson Produkts, orthogonale Zerlegung $\mathscr{M}_k(\Gamma) = \mathbb{C}E_k \oplus \mathscr{S}_k(\Gamma)$, Selbstadjungiertheit der Hecke-Operatoren und Algebraizität der Fourier -Koeffizienten.

Zur Aufteilung:

Die hier grob skizzierte Aufteilung in zwei Themen muss nicht 1:1 der Aufteilung in zwei Vorträge entsprechen. Auch lassem sich einige Beweise und Details auch etwas kürzer fassen, als hier angedeutet. Bitte sprechen Sie sich untereinander und mit mir noch einmal hierüber ab.

5 L-Reihen für Eigenformen

Unter einer Dirichlet-Reihe (oder L-Reihe) versteht man eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \qquad \text{mit} \quad s \in \mathbb{C}.$$

Ist eine Dirichlet-Reihe für ein $s_0 \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent, so gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ und eine Halbebene $\{s \in \mathbb{C}\,; \Re s > C\}$, auf welcher diese absolut konvergiert. Unter bestimmten Bedingungen genügt die durch eine solche Reihe definierte Funktion einer Funktionalgleichung, durch welche sie meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

Sind die a_n multiplikativ, kann man die Dirichlet-Reihe als Euler-Produkt schreiben, das bekannteste Beispiel ist hier die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Ihre Konvergenzhalbebene ist durch $\Re s > 1$ gegeben. Man ordnet nun einer normierten (d.h. $c(1) = 1$) Hecke-Eigenform $f(z) = \sum_{n>0} c(n) q^n$ die L-Reihe

$$\sum_{n>0} \frac{c(n)}{n^s}$$

zu. Die multiplikativen Relationen zwischen den Fourierkoeffizenten einer Eigenform erlauben es, auch solche L-Reihen als Euler-Produkte zu schreiben.

Weiter besitzen diese Dirichlet-Reihen eine Funktionalgleichung und dadurch eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Die für den Beweis eingesetzten Techniken (Mellin-Transformation, Eigenschaften von Γ- und Theta-Funktionen) treten ähnlich in der Theorie der Zeta-Funktionen auf, haben jedoch auch weit über die analytische Zahlentheorie hinausreichende Bedeutung.

Literatur [123] §4.2 enthält alles Nötige, ist allerdings recht kompakt. Zu Dirichlet Reihen allgemein siehe [FB], VII.§2, 3. Dirchlet-Reihen, speziell für Eigenformen (für $\Gamma(1)$) werden in [Do] §12, bis einschließlich 12.4 behandelt. (Alternativ kann man auch [KK] IV, §4 zu Rate ziehen – ziemlich ausführlich, aber alle Inhalte werden darin behandelt.)

Literatur

[123] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier; *The 1-2-3 of Modular Forms*, Springer Verlag 2008

[DS] F. Diamond, J. Shurman; *A First Course in Modular Forms*, Springer Verlag 2005

[FB] E. Freitag, R. Busam; *Funktionentheorie I*, Springer 2005

[KK] M. Koecher, A. Krieg; *Elliptische Funktionen und Modulformen*, Springer 2007

[M] J. S. Milne; *Modular Functions and Modular Forms*, Vorlesungsskript, 2009; http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/mf.html

[Do] Dolgachev; *Modular Forms*, Vorlesungsskript, 1998; http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/lecturenotes.html