Seminarprogramm Dirichletreihen

WS 2012/13

Dr. Eric Hofmann

25. Juni 2012

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1,
für einige Vorträge ist auch etwas Algebra von Nutzen.
Vorbesprechung: am 25. Juli 2012, um 14 Uhr ct. in HS 5, INF 288.

1 Dirichletreihen: Analytische Theorie 16.10.2012

Wir führen den Begriff der *Dirichletreihe* ein, welcher in der analytischen Zahlentheorie eine ähnlich große Bedeutung einnimmt, wie derjenige der Potenzreihe in der Funktionentheorie. Ein Spezialfall, der für dieses Seminar besonders wichtig ist, sind die sogenannten *gewöhnlichen Dirichletreihen.* Sie haben die Eigenschaft, immer in einer rechten Halbebene der komplexen Zahlenebene, der Form $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$[1] absolut konvergent zu sein. Die Gerade $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$ heißt *Konvergenzabszisse.* Auf dieser Gerade ist für bestimmte Dirichletreihen das Auftreten einer Singularität garantiert, nach dem *Satz von Landau*, den wir ebenso wie den *Identitätssatz* für Dirichletreihen zeigen wollen.
Literatur: Abschnitt 1 in [Zag], einschließlich des Beweis für Satz 3.

2 Unendliche Produkte 23.10.2012

Wie wir im weiteren Verlauf des Seminars sehen werden, lassen sich viele Dirichletreihen als unendliche Produkte darstellen. Aber auch an anderen Stellen, z.B. im Zusammenhang mit der Gammafunktion (vgl. Vortrag 4) werden uns unendliche Produktentwicklungen begegnen. In diesem Vortrag wollen wir eine saubere Definition für die Konvergenz unendlicher Produktentwicklungen einführen und Konvergenzkriterien erarbeiten. Anschließend werden wir noch den wichtigen *Weierstraßschen Produktsatz* zeigen.
Literatur: [Koh] Abschnitt 1.2, bis einschließlich Satz 4.

[1] Im Zumsammenhang mit Dirichletreihen wird die komplexe Variable meist mit s, statt wie gwohnt z, bezeichnet.

3 Dirichletreihen: Formale Eigenschaften 30.10.2012

Man kann, zunächst rein formal betrachtet, die Summe von Dirichlet Reihen bilden und ein Produkt einführen, letzteres als multiplikative Faltung. Wir werden sehen, dass die Summe zweier konvergenter Dirichletreihen ebenfalls konvergiert, und auch ihr Produkt eine konvergente Dirichletreihe ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren absolut konvergiert. Anschließend werden wir *multiplikative* und *streng multiplikative* Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$ anhand von Beispielen kennenlernen. Dirichletreihen, deren Koeffizienten durch eine multiplikative Funktionen gegeben sind, lassen sich durch ein *Eulerprodukt* darstellen, ein unendliches Produkt, welches über alle Primzahlen läuft. Schließlich zeigen wir noch die *Möbiussche Umkehrformel*, die es ermöglicht, multiplikative Funktionen ineinander zu überführen, und damit z.B. Relationen zwischen Dirichletreihen aufzufinden.
Literatur: Abschnitt 2 in [Zag].

4 Die Gammafunktion 6.11.2012

Nun führen wir die Gammafunktion ein, und zeigen ihre wichtigsten Eigenschaften.
Literatur: Abschnitt 3 in [Zag]; ergänzend kann auch [Koh] hinzugezogen werden, etwa für den Beweis von (14), der sich in [Koh] Abschnitt 1.2 findet.

5 Die Riemannsche Zetafunktion 13.11.2012

Das vielleicht einfachste, dennoch aber äußerst wichtige, Beispiel für eine Dirichletreihe ist die Zetafunktion. Alle uns schon bekannten Resultate über Dirichletreihen wollen wir an diesem Beispiel noch einmal nachweisen. Außerdem werden wir die Werte der Zetafunktion an denjenigen ganzzahligen Stellen bestimmen, für welche diese bekannt sind[2] Die Zetafunktion besitzt eine weitere wichtige Eigenschaft, die für weiteren Beispiele im Laufe des Seminars wegweisend ist: Sie hat nämlich eine Funktionenalgleichung, durch welche sie sich auch analytisch fortsetzen lässt. Wir wollen zumindest eine Heuristik dafür angeben, warum diese Funktionalgleichung gilt, und einen Beweis nach Möglichkeit skizzieren.
Literatur: [Zag], Abschnitt 4. Einen Beweis für die Funktionalgleichung (15) ist in Aufgabe 2 zu finden.

6 Charaktere 20.11.2012

Nach der Riemannschen Zetafunktion stellen die Dirichletschen L-Reihen weitere sehr wichtige Beispiele dar, wir werden Sie in den folgenden Vorträgen studieren und sehen, wie sich mit ihrer Hilfe wichtige zahlentheoretische Aussagen beweisen lassen (siehe die Vorträge 8 und 11).

Die Koeffizienten dieser L-Reihen heißen *Dirichletcharaktere* und sind Gruppencharaktere zu den Restklassengruppen $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ für $N \in \mathbb{N}$. Wir führen zunächst allgemein *Gruppencharaktere* für endliche Gruppen ein, und zeigen: Ist G eine endliche abelsche Gruppe,

[2] Über die Zetawerte an den restilichen ganzzahligen Stellen weiß man (auch heute noch) sehr wenig.

so stellt die Menge ihrer Charaktere[3] eine zu G isomorphe Gruppe dar. Hierzu benötigt man den Struktursatz über endliche Abelsche Gruppen aus der Algebra. Dannach spezialisieren wir auf den Spezialfall der Dirichletcharaktere. Wir zeigen bestimmte Orthogonalitätsrelation und führen den Begriff des *primitiven Charakters* ein. Abschließend ermitteln wir alle reellen primitiven Dirichletcharaktere.
Literatur: Abschnitt 5 in [Zag].

7 Dirichletsche L-Reihen 27.11.2012

Wie schon angekündigt, wollen wir uns nun mit den Dirichletschen L-Reihen befassen. Deren Eulerproduktentwicklung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Charaktere. Für den *Hauptcharakter* χ_0 ist die L-Reihe $L(\chi_0, s)$ gleich der Zetafunktion. Hingegen werden wir für jeden von χ_0 verschiedenen Charakter χ als erstes wichtiges Resultat zeigen, dass $L(\chi, s)$ an der Stelle $s = 1$ nicht verschwindet. Als Korollar ergibt sich der Dirichletsche Primzahlsatz: *Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es in jeder Folge der Art $a + kn$, $k = 1, 2, \dots$ mit $a \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$, unendlich viele Primzahlen.*

(In der Tat war der Beweis diese Aussage die ursprüngliche Motivation für die Einführung solche L-Reihen durch Dirichlet.)
Literatur: Abschnitt 6 in [Zag].

8 Werte von L-Reihen an negativen ganzen Stellen 4.12.2012

Ähnlich wie in Vortrag 5 für die Zetafunktione wollen wir hier, für Dirichletsche L-Reihen deren Werte an negativen ganzzahligen Stellen (sowie bei $s = 0$) untersuchen. Wir erhalten eine explizite Formel, in der außer Charakterwerten auch die bereits vertrauten Bernoulli-Zahlen auftauchen. **Literatur:** Abschnitt 7 in [Zag].

9 Binäre quadratische Formen 11.12.2012

In den folgenden Vorträgen, abschließend mit Vortrag 11, soll mit Hilfe der L-Reihen ein weiteres klassiches Ergebnis der analytischen Zahlentheorie bewiesen werden, nämlich die Klassenzahlformel für (binäre) quadratische Formen.

Als Vorbereitung hierzu sollen in diesem Vortrag als erstes *binäre quadratische Formen* mit ganzzahligen Koeffizienten eingeführt werden. Das Ziel ist es, diese näher zu klassifizieren; hierzu wird zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Formen eingeführt. Die *Diskriminante* erweist sich dann als Invariante der jeweiligen Äquivalenzklasse. Umgekehrt gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen von quadratischen Formen zu gegebener Diskriminante $D \in \mathbb{Z}$. Deren Anzahl entspricht – leicht abgewandelt – der *Klassenzahl h_D*.

Wir skizzieren das weitere Vorgehen um h_D zu ermitteln und beweisen den ersten Schritt auf diesem Weg (Satz 2). **Literatur:** Abschnitt 8 in [Zag], bis ausschließlich Satz 3.

[3] Man nennt dies die (zu G) *duale Gruppe* $\hat{G}$.

10 Die Klassenzahl 18.12.2012

Wir führen das Programm des vorangegangen Vortrags weiter. Es zeigt sich, dass die Klassenzahl, bis auf eine gut handhabbare Konstante, durch den Wert der einer speziellen L-Reihe an der Stelle $s = 1$, $L(\chi_D, 1)$, gegeben ist. Hierbei ist χ_D der durch D bestimmte Dirichletcharakter. **Literatur:** Abschnitt 8 in [Zag], ab einschließlich Satz 3.

11 Die Berechnung von $L(\chi, 1)$ 8.1.2013

Mit dem letzten Vortrag ist klar geworden, dass wir um h_D bestimmen, den Wert der von $L(\chi_D, s)$ an der Stelle $s = 1$ berechnen müssen. Hierzu werden wir zunächst als Hilfsmittel *Gaußsche Summen* einführen und diese studieren. Mit deren Hilfe können wir anschließend eine explizite Formel für den L-Wert $L(\chi_D, 1)$ (und damit letztlich für h_d) zeigen, die lediglich von D und Charakterwerten von χ_D abhängt. **Literatur:** Abschnitt 9 in [Zag] jedenfalls bis einschließlich Satz 3, der Rest des Abschnitts soll in Rücksprache mit mir kurz zusammengefasst werden, er stellt einen Ausblick anhand von Beispielen dar.

12 Grundlegendes zu Modulformen 15.1.2013

In den letzten Vorträgen des Seminars wollen wir uns mit komplexwertigen Funktionen befassen, die ein besonders schönes Transformationsverhalten unter der Operation der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch sog. *Möbiustransformationen* aufweisen; solche Funktionen heißen *Modulformen*, sie spielen eine große Rolle in der (nicht nur) analytischen Zahlentheorie. Aufgrund ihres Transformationsverhalten kann lassen sie sich als Fourierreihen entwickeln. Modulformen, die gewissen Bedingungen an ihr Verhalten beim Grenzübergang $y \to \infty$ (wobei $z = x + iy$) genügen, heißen *Spitzenformen*.

In diesem Vortrag wollen wir erst einmal mit diesen neuen Begriffen vertraut werden. Wir werden, nach einigen weiteren Vorbereitungen, im abschließenden Vortrag 15 sehen, wie man jeder Modulform eine Dirichletreihe zuordnen kann.
Literatur: Abschnitte III.1.1.- III.1.6 in [KK].

13 Heckeoperatoren 22.1.2013

Wir führen in diesem Vortrag für jede natürliche Zahl n einen Operator T_n ein, einen sogenannten *Heckeoperator*. Mir möchten erreichen, dass eine möglichst große Klasse von Modulformen *simultane Eigenformen* für alle T_n sind. Für solch eine Eigenform f kann man durch geeignete Normierung stets erreichen, dass der Eigenwert unter dem Operator n gerade der n-te Fourierkoeffizient von f ist.
Literatur: Abschnitte IV.1.-IV.1.3 in [KK], sowie Abschnitt IV.1.4 ohne die Anwendung auf die Diskriminante.

14 Beispiele für Modulformen 29.1.2013

Wir wollen nun auch wenigstens ein paar Beispiele für Modulformen kennenlernen. Am einfachsten lassen sich die *Eisensteinreihen* betrachten. Wir führen diese ein, weisen nach, dass es sich tatsächlich um Modulformen handelt und bestimmen ihre Fourierentwicklung. Die sogenannte *Diskrimante* Δ lässt sich dann mit Hilfe zweier Eisensteinreihen, G_4 und G_6, konstruieren und erweist sich als Spitzenform vom Gewicht 12.
Literatur: Abschnitte III.2.1-III.2.2 und die Diskriminante als Beispiel in IV.1.4 [KK].

15 L-Reihen zu Modulformen 5.2.2013

Wie bereits angekündigt, entwicklen wir die Theorie von zu Modulformen gehörigen L-Reihen (man nennt diese manchmal auch *Heckesche L-Reihen*). Hierbei sind die Fourierkoeffizienten einer Modulform gerade die Koeffizienten der zugeordneten Dirichletreihe. Wir berechnen die Konvergenzabszisse und finden für Hecke-Eigenformen eine schöne Eulerproduktentwicklung. Für letztere benötien wir Rechenregeln für Heckeoperatoren, welche skizzenhaft hergeleitet werden sollen.
Literatur: Abschnitte IV.4.4 und IV.4.8 in [KK]. Skizzenhaft sollen auch die Ergebnisse der Abschnitte IV.2.1-IV.2.3 präsentiert werden.

Literatur

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen* (2. Auflage). Springer, 2007.

[Koh] W. Kohnen. *Funktionentheorie 2* (Vorlesungsskript).

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.