Proseminar Fourieranalysis

SS 2013

Dr. Eric Hofmann

4. März 2013

Voraussetzungen: Analysis 1, für einige Vorträge ist auch etwas Lineare Algebra von Nutzen.
Vorbesprechung: am 4. Februar 2013, um 13 Uhr in HS 6, INF 288.

1 (Komplexe) Exponentialreihe und Trigonometrische Funktionen 15.4

Die Exponentialfunktion führen wir über die Reihendarstellung

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

ein, es gilt $e = e(1)$. Hieraus ergeben sich ihre wichtigsten Eigenschaften z.B. die Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$. Nun betrachten wir die Exponentialreihe auch für komplexe Zahlen d.h. $\exp(z)$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und können nun die Trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für reelle Argumente $x \in \mathbb{R}$ definieren:

$$\cos(x) := \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right),$$
$$\sin(x) := \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

hieraus erhält alle wichtigen Eigenschaften dieser beiden Funktionen, sowie die Reihendarstellungen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Weiter zeigt man, dass $\sin(x)' = \cos(x)$ und $\cos(x)' = -\sin(x)$.

Dieser erste Vortrag soll vor allem dazu dienen, wesentliche Formeln und Definitionen bereitzustellen, die Grundlage für den Rest des Seminars sind. Die inhaltlichen Zusammenhänge und Herleitungen sollen verständlich dargestellt werden, bei Beweisen kann man sich auf skizzenhafte Angaben beschränken. Die genaue Stoffauswahl sollte in Rücksprache mit mir erfolgen.

Literatur: [Koe1], §§ 8.1, 8.2, 10.1, 10.2, 10.5, oder [Fo1], §8, §13, §14

2 Trigonometrische Polynome, Definition von Fourierreihen und Identitätssatz 23.4

Wir betrachten zunächst *trigonometrische Polynome*, dies sind Funktionen der Art

$$T(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx} \quad \text{bzw.} \quad A_0 + \sum_{n=1}^{N} [A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)]$$

diese können benutzt werden, um (stetige) periodische Funktionen (beliebig genau) zu approximieren. Dies ist die Aussage des Weierstraß'schen Approximationssatzes.

Sei nun f eine 2π-periodische Regelfunktion. Wir definieren für $n \in \mathbb{Z}$ den n-ten Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Das trigonometrische Polynom mit den Koeffizienten a_n für $-N \leq n \leq N$ heißt N-tes *Fourierpolynom* $S_N f(x) X$ bzw. n-te Teilsumme der *Fourierreihe* $S_\infty f(x)$, welche man durch Grenzwertbildung $N \to \infty$ erhält.

Der *Eindeutigkeits-* bzw. *Identitätssatz* besagt nun, dass eine Funktion f deren Fourierkoeffizienten $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ alle gleich 0, selbst identisch gleich der Nullfunktion ist. Anders formuliert (man betrachte $f - g$) bedeutet dies, dass für zwei (stetige, 2π-periodische) Funktionen, f und g, deren sämtliche Fourierkoeffizienten gleich sind ($\hat{f}(n) = \hat{g}(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$), gilt $f = g$. Hieraus folgt schließlich der *Darstellungssatz*, nach welchem, wenn die Fourierreihe zu f gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert, gilt $S_\infty f = f$. *Beim Beweis des Identitätssatzes kann man entweder den Weierstaß'schen Approximationssatz benutzen, oder so vorgehen wie in [StSh] ch. 2.2, nutzt man die erste Möglichkeit, sollte man allerdings den Approximationssatz zumindest skizzenhaft beweisen. Dazu, wie der Beweis aus [Koe1] § 16.5 für trigonometrische Polynome umzuformulieren ist, kann gerne mit mir Rücksprache gehalten werden. Andernfalls könnte man auf den Beweis des Approximationssatzes auch verzichten.* **Literatur:** [Koe1], § 17.1, 17.2, [StSh], ch. 2.1, 2.2

3 Punktweise Konvergenz von Fourierreihen, Lokalisationsprinzip 30.4

Das wesentliche Ziel dieses Vortrags ist es, eine Satz über die punktweise Konvergenz von Fourierreihen zu zeigen. Er besagt, dass die Fourierreihe $S_\infty f$ zu einer Regelfunktion f, die in einem Punkt x stetig, sowie links- und rechtsseitig differenzierbar ist, in diesem Punkt x gegen $f(x)$ konvergiert. (Ist f in x nicht stetig, so konvergiert $S_\infty f(x)$ gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}\left[f(x_-) + f(x_+)\right]$.

Auf dem Weg zu diesem Satz benötigen wir zwei Lemmata, eines von Riemann und eines von Dirichlet. In diesem Kontext tritt auch zum ersten Mal der sogenannte *Dirichlet-Kern* (Nten Grades) D_N in Erscheinung, vgl. auch [StSh], p. 37, ein erstes Beispiel für eine Kernfunktion, wie wir sie später näher untersuchen wollen.

Als Korollar zu dem Satz erhält man noch das sogenannte *Lokalisationsprinzip*, nämlich, dass die Fourierpolynome $S_N f$ und $S_N g$ zu zwei Funktionen f und g welche *lokal* übereinstimmen, d.h. auf einem offenen Intervall I, *dort* den gleichen Limes haben, d.h. $S_\infty f(x) = S_\infty g(x)$ für alle $x \in I$.
Literatur: [Koe1] § 17.4

4 Faltung von Funktionen 7.5

Wir führen eine Verknüpfung zwischen 2π periodischen integrierbaren Funktionen ein, die sogenannte *Faltung*. Sind f, g zwei solche Funktionen, so ist ihre Faltung $f * g$ definiert als

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t)\, dt.$$

Es gilt nun, die wichtigsten Eigenschaften dieser Verknüpfung zu untersuchen, unter anderem, dass sie kommutativ und assoziativ ist, und einem Distributivgesetz bezüglich der Addition genügt, sowie ihre Beziehung zu Fourierreihen zu beleuchten. So gilt beispielsweise $D_N * f = S_N(f)$.
Literatur: [StSh] ch. 2.3

5 Summationsverfahren und Integralkerne 14.5

Wir definieren zunächst, was wir unter einer Familie $\{K_N\}_{N=0}^{\infty}$ von 'guten' Kernfunktionen verstehen wollen. Es zeigt sich dann, dass für eine solche Familie und eine integrierbare 2π-periodische Funktion f gilt $\lim_{N\to\infty}(f * K_N)(x) = f(x)$, an allen Stetigkeitsstellen x von f.

Für die Dirichlet-Kerne $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ ist $f * D_N$ genau die N-ten Teilsumme $S_N(f)$ der Fourierreihe $S_\infty(f)$, und im Grenzwert $N \to \infty$ erhält man die lokale Konvergenzaussage aus Vortrag 3.

Sieht man die Fourierkoeffizienten von f, a_n, $n \in \mathbb{Z}$ (bzw. $A_n, n \geq 0$ und $B_n, n > 0$) als gegeben an, so kann auf dem Weg zur Fourierreihe auch andere Verfahren betrachten, deren Glieder $a_n e^{inx}$ zu summieren. Die dabei auftretenden Teilsummen möchte man als Faltung von f mit einer geeigneten Kernfuktion darstellen. Beispielsweise kann man nach Cesàro die *N-te Cesàro Summe* σ_N als Mittelwert der ersten N Teilsummen bilden

$$\sigma_N(f)(x) := \frac{1}{N}\big(S_0(f)(x) + \cdots + S_{N-1}(f)(x)\big).$$

Die zugehörige Kernfunktion ist der sogenannte *Fejér*-Kern F_N.

Wir betrachten auch die Summation nach Abel und die *Poisson*-Kerne.
Literatur: [StSh], ch. 2.4, 2.5, sowie nochmal [Koe1] § 17.4 (Dirichletkern), und Aufgabe 12 (Fejér/Cesàro-Summation).

6 Der Raum quadratintegrabler Funktionen,[1] Orthogonalität, Besselsche Approximation 21.5

Ziel dieses und des nächsten Vortages ist es, zu zeigen, dass die Folge der Teilsummen $S_N(f)$ *im quadratischen Mittel* gegen die Funktion f konvergiert siehe unten.

Hierzu betrachten wir die 2π-periodischen integrierbaren Funktionen als einen unendlich dimensionalen Vektorraum, mit einem Skalarprodukt (genauer einer hermiteschen Form), gegeben durch

$$\big(f,g\big) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

und der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\big(f,f\big)}$ (sog. L^2-Norm, sprich „L zwei Norm"), wird dieser zu einem normierten Raum. Man erkennt nun, dass die Funktionen e^{inx}, $n \in \mathbb{Z}$, eine Orthonormalbasis dieses Raums bilden. Als Konsequenz aus der Orthogonalität, man verwendet den Satz von Pythagoras in einer Fassung für normierte Räume, ergibt sich hieraus ein Satz, nach welchem das Fourierpolynom $S_N(f)$ unter allen trigonometrischen Polynomen vom Grad $\leq N$ den geringsten Abstand von f hat, gemessen nach der L^2-Norm. ([StSh], Lemma 1.2 bzw. [Koe1] 17.5 Satz.)

Schließlich erhält man hiermit noch als Korollar die *Besselsche* Ungleichung.

Die Theorie normierter Räume sollte zunächst ähnlich ausführlich und allgemein dargestellt werden wie in [StSh], wobei man auf die beiden Beispiele ℓ^2 und $\mathscr{R}$ eingehen sollte.

Literatur: [Koe1] § 17.5, [StSh], ch. 3.1.1

Die genaue inhaltlichen Aufteilung zwischen den Vorträgen 6 und 7 kann auch etwas anders erfolgen, als hier skizziert, dazu gegebenenfalls Rücksprache mit mir.

7 Konvergenz im Quadratischen Mittel, Parsevalsche Gleichung 28.5

In diesem Vortrag soll nun gezeigt werden, dass die Fourierreihe $S_\infty(f)$ im quadratischen Mittel gegen die zu approximierende Funktion f konvergiert, genauer:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \to 0 \quad \text{für} \quad N \to \infty.$$

Weiter erhält man auch die Gleichung von *Parseval*, welche man so auffassen kann, dass die Norm in ℓ^2 der Folge $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ der Fourierkoeffizienten, gleich der L^2-Norm von f (in $\mathscr{R}$, bzw. $\mathscr{L}^2$) ist. (Dies lässt sich zu einer entsprechenden Aussage für die Skalarprodukte in $\mathscr{R}$ und ℓ^2 verallgemeinern.)

Literatur: [Koe1] § 17.7, [StSh], ch. 3.1.2

[1] Der Titel des Vortrags ist ein wenig zu hoch gegriffen: Eigentlich möchte man den im Titel genannten Raum $\mathscr{L}^2$ betrachten, dies setzt aber einen Integralbegriff voraus, der uns in Analysis 3 zur Verfügung stehen wird, das *Lebesgue-Integral*. Der Raum $\mathscr{R}$ hat nämlich einen Nachteil, er ist nicht *vollständig*, siehe zu dieser Problematik [StSh], S. 70.

8 Stückweise stetig differenzierbare Funktionen, Gibbs'sches Phänomen 4.6

Für Funktionen in $\mathscr{R}$, die stückweise durch stetig differenzierbare Funktionen gegeben sind, lässt sich mit Hilfe der Besselschen Ungleichung eine weitergehende Konvergenzaussage beweisen: Die Fourierreihe zu f konvergiert *gleichmäßig* gegen f in jedem Intervall $[a,b]$, in dem keine Unstetigkeitsstelle von f enthalten ist.

Das wirft die Frage auf, was an einer Sprungstelle von f geschieht. In der Tat beobachtet man ein merkwürdiges Phänomen: Das Fourierpolynome $S_N(f)$, $N = 1,2,\ldots$ machen hier einen kleinen „Überschwinger ", sie schwingen über den jeweiligen Wert von f an der Sprungstelle hinaus; merkwürdigerweise verschwindet dieser für große N nicht, sonder pendelt sich auf eine in etwa konstante Höhe ein.
Literatur: [Koe1], § 17.6

9 Lokale Aussagen, ein 'Gegenbeispiel' 11.6

Hier soll eine stetige Funktionen konstruiert werden, deren Fourierreihe divergent ist.

Zu Begin kann man noch mal kurz die lokalen Aussagen rekapitulieren, die am Anfang in ch. 3.2 behandelt werden, allerdings decken sie sich teils mit Inhalten, die schon aus Vortrag 3 bekannt sind.
Literatur: [StSh] ch. 3.2

Anwendungen

Für die folgenden beiden Vorträge soll in Rücksprache mit mir je ein Thema aus den Anwendung von Fourierreihen asgewählt werden, also z.B. isoperimetrisches Problem, Wärmeleitung in einem Ring (Thetafunktionen), Weylscher Gleichverteilungssatz, (angeregte) schwingende Saiten.

10 Anwendung von Fourierreihen I 18.6

11 Anwendung von Fourierreihen II 25.6

Literatur: zu diesen beiden Vorträgen z.B. aus [Koe1] § 17.8 (isoperimetrisches Problem), § 17.9 (Thetafunktion) [StSh] ch. 4 (4.1 isoperimetrisches Problem, 4.2 Gleichverteilung nach Weyl, 4.4 Wärmeleitung, ...)

12 Uneigentliche Integrale, Fouriertransformationen I 2.7

Etwas unpräzise ausgedrückt, besteht die Idee der Fouriertransformation gegenüber der Fourierreihenentwicklung darin, den Kreis bzw. ein Periodenintervall durch die ganze reelle Gerade zu ersetzen. Die Summe $\sum_{-\infty}^{\infty}$ wird dabei durch ein uneigentliches Integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ ersetzt. Man definiert dann die Fouriertransformierte einer Funktion f als

$$\hat{f}(\xi 9 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

In dem ersten Vortrag geht es darum, zunächst einiges uneigentlich Integrale zu wiederholen, und sich mit Wachstumsbedingungen zu befassen, denen der Inegrand genügen muss, damit das Integral über ganz $\mathbb{R}$ konvergiert.

Zur genauen Aufteilung zwischen diesen und dem nächsten Vortrag kann nochmal Rücksprache mit mir erfolgen, das z.B. die Definition des Schwartzraums auch schon in dem ersten Vortrag erfolgen könnte. **Literatur:** [StSh] ch. 5.1.1-5.1.2

13 Schwartzraum, Fouriertransformationen II 9.7

Die Übeglegungen zur Konvergenz der Fouriertransformierten, führen zur Definition eines Raums 'hinreichend schnell' abfallender Funktionen, des (bzw. eines) sogenannten Schwartz-Raums.

Weiter gilt es nun einige grundsätzliche Eigentschaften der Fouiertransformation zu untersuchen und schließlich die Umkehrformel der Fouriertransformation zu beweisen.
Literatur: [StSh] ch 5.1.4-5.1.5, (5.1.6 Plancherel Gleichung, je nach Aufteilung mit dem vorherigen Vortrag und Motivation.)

14 Anwendung der Fouriertransformation 16.7

Der Rest des Kapitels 5.1 sowie das Kapitel 5.2 von [StSh] bieten einige Möglichkeiten, Die Auswahl eines Themas hieraus und der genauere inhaltliche Zuschnitt sollten in Rücksprache mit mir erfolgen.

Literatur

[Fo1] O. Forster, *Analysis 1*, Viehweg.

[Koe1] K. Königsberger, *Analysis 1*, Springer Verlag.

[Koe2] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer Verlag.

[StSh] E. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis, an Introduction*, Princeton University Press .