Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

3. Juli 2017

Funktionentheorie 1 – letztes Übungsblatt

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Seine f und g ganze Funktionen derart, dass $f(g(z)) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. *Zeigen Sie:* Ist g nicht konstant, so ist f identisch Null.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Welches sind die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen, und von welcher Art sind sie? Geben Sie bei Polen stets auch die Ordnung an!

$$(a)\quad \frac{1}{z(z-2)^2} \qquad (b)\quad \frac{1}{e^{\pi i z}-1}, \qquad (c)\quad \frac{\cos(z)-1}{z^4}$$

Aufgabe 3 (2+1 Punkte)

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen auf den angegebenen Ringgebieten:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z^4} \quad \text{auf} \quad (0<|z|<1) \quad \text{und auf} \quad (0<|z-i|<1),$$
$$g(z) = \frac{3z+5}{(z+1)(z+2)} \quad \text{auf} \quad (1<|z-1|<2)\,.$$

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Für $n \in \mathbb{Z}$ und $w \in \mathbb{C}$ sei $\mathscr{J}_n(w)$ der Koeffizient von z^n in der Laurent-Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad f(z) := \exp\left(\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

um den Ursprung, also im Ringebiet $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < |z| < \infty\}$.

Weisen Sie folgende Aussagen nach:

(a) $\mathscr{J}_{-n}(w) = \mathscr{J}_n(-w)$ für alle $w \in \mathbb{C}$.

(b) $\mathscr{J}_n(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - w \sin t)\, dt$.

(c) $\mathscr{J}_n(w)$ ist eine ganze Funktion (der Veränderlichen w), für $n > 0$ lautet ihre Taylor-Entwicklung

$$\mathscr{J}_n(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{w}{2}\right)^{2m+n}}{n!\,(n+m)!}.$$

Bemerkung Die $\mathscr{J}_n(w)$ heißen Besselfunktionen (erster Art) der Ordnung n. Sie erfüllen die sogenannte *Besselsche Differentialgleichung* $w^2 f''(w) + w f'(w) + (w^2 - n^2) f(w) = 0$.