Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

26. Juni 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 10

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ bestimmt werden. Sei dazu $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph und bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung ϕ^{-1}.

(a) Zeigen Sie: Ist $\phi(0) = 0$, so gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, so dass $\phi(z) = \zeta z \ (\forall z \in \mathbb{E})$.

(b) Weisen Sie nach: Für jedes $a \in \mathbb{E}$ ist die Abbildung

$$\phi_a : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}, \quad z \longmapsto \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

wohldefiniert, holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung $\phi_a^{-1} = \phi_a$.

(c) Zeigen Sie nun: Zu jedem $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$ gibt es ein $a \in \mathbb{E}$ und ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$, so dass ϕ sich schreiben lässt als

$$\phi(z) = \zeta \phi_a(z) \quad (\forall z \in \mathbb{E}).$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen haben eine hebbare Singularität bei $a = 0$? (Begründung!)

$$\text{i)} \ \frac{e^z}{z^{19}}, \qquad \text{ii)} \ \frac{(e^z-1)^2}{z^2}, \qquad \text{iii)} \ \frac{z}{e^z-1}.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f, g : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph, beide mit einer Polstelle der Ordnung k bei a. Zeigen Sie: Es gibt $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(a) \subset D$ und $g(z) \neq 0 \ \big(\forall z \in \dot{U}_\delta(a)\big)$, und die Funktion $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ hat in $z = a$ eine hebbare Singularität.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und $f : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer Singularität in a. Zeigen Sie: Ist a nicht hebbar, so ist a eine wesentliche Singularität von $g(z) = e^{f(z)}$.