Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

19. Juni 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 9

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $r > 0$ und $f : U_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Es gelte $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in U_r(0) \cap \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Die Taylorkoeffizienten von f um $z_0 = 0$ sind alle reell und es gilt $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ für alle $z \in U_r(0)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f beliebig oft reell differenzierbar ist, sich aber nicht um $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt. **Hinweis:** Man zeige $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann auch f holomorph ist. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Ableitungen lokal gleichmäßig gegen f' konvergiert.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. D ist zusammenhängend.

2. Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, und gilt $f(z)g(z) = 0$ für alle $z \in D$, so ist $f \equiv 0$ oder $g \equiv 0$. (Mit anderen Worten: der Ring der auf D holomorphen Funktionen ist nullteilerfrei.)

Abgabe: 26. Juni, bis spätestens 14 Uhr ct.