Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

12. Juni 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 8

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Beweisen Sie die *Poissonsche Integralformel*: Sei f holomorph auf $\overline{U_R}(0)$, der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Radius R um den Ursprung (d.h. es gibt eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ welche $\overline{U_R}(0)$ enthält, so dass f holomorph auf D ist). Dann gilt für alle $z \in U_R(0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w} \frac{R^2 - |z|^2}{|w-z|^2} dw,$$

wobei C_R die einmal im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kreislinie um 0 mit Radius R bezeichnet.
Hinweis: Wenden Sie die Cauchysche Integralformel auf $f(z)/\left(R^2 - \bar{v}z\right)$ für $v \in U_R(0)$ an.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie ohne Zuhilfenahme des in der Vorlesung vorkommenden Satzes von Liouville, dass die Funktion

$$1 + \sin^2(z)$$

auf $\mathbb{C}$ nicht beschränkt ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

(a) Sei f eine ganze Funktion. Es gebe über $\mathbb{R}$ linear unabhängige komplexe Zahlen ω und ω', so dass

$$f(z+\omega) = f(z) = f(z+\omega') \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C})$$

gilt. Man zeige, dass dann f konstant ist.

(b) Sei g eine ganze Funktion. Es gebe ein $C \in \mathbb{R}$ derart, dass $\Re\left(g(z)\right) \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann g konstant ist.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion. Es gebe $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}_+$ derart, dass

$$\left|f(z)\right| \le A + B\,|z|^n \qquad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie: f ist ein Polynom.