Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

6. Juni 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 7

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (1+2 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes für Sterngebiete die Werte der folgenden Integrale:

(a)
$$\int_C z^n e^z \, dz \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$
hierbei bezeichnet C die Verbindungsgerade von 0 nach $2\pi i$.

(b)
$$\int_{|z|=1} z^{-n} e^z \quad (n \in \mathbb{N}).$$
(Hierbei ist über die genau einmal im positiven Sinne durchlaufene Einheitskreislinie zu integrieren.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f \colon D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass dann eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ existiert mit

$$f(z) = e^{h(z)} \quad \text{für alle} \quad z \in D.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes und der Cauchyschen Integralformel

$$\text{a)} \int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3} \, dz, \qquad \text{b)} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+1} \, dz, \qquad \text{c)} \int_{|z-1|=2} \frac{\sin(z)}{z^4},$$

hierbei ist jeweils über die einmal im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kreislinie zu integrieren.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 4 (3 Punkte)

In dieser Aufgabe soll der Fundamentalsatz der Algebra direkt aus der Cauchyschen Integralformel hergeleitet werden, ein etwas anderer Beweis wird in der Vorlesung behandelt.

Nehmen Sie dazu an, ein Polynom

$$P(X) = \sum_{m=0}^{N} a_m X^m \quad \in \mathbb{C}[X]$$

vom Grad $N > 0$ (d.h. $a_N \neq 0$) habe keine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Zeigen Sie zunächst, dass dann

$$\int_{C_r} \frac{a_0}{zP(z)} dz = 2\pi i.$$

gilt, wobei C_r die im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kreislinie mit Radius $r > 0$ um den Ursprung bezeichne. Leiten Sie nun einen Widerspruch her.

Hinweis: *(Wachstumsabschätzung für Polynome)* Sie dürfen ohne Beweis folgende Aussage verwenden: Für jedes Polynom $P(z)$ vom Grad $N > 0$ gibt es ein $R > 0$, so dass

$$\frac{1}{2}|a_N||z|^N \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_N||z|^N$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt.