Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

29. Mai 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 6

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Sei γ die mathematisch positiv durchlaufene Kreislinie $|z-1| = 3$. Man berechne das Integral

$$\int_\gamma z e^{z^2} \, dz.$$

(b) Sei γ die mathematisch positiv durchlaufene Randlinie der Kreisscheibe mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$. Sei $A \in \mathbb{R}_{>0}$ der Flächeninhalt dieser Kreisscheibe. Man zeige:

$$\frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z} \, dz = A.$$

Hinweis: Es genügt, den Flächeninhalt hier elementargeometrisch zu bestimmen.

(c) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $D \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die stetige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ keine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Sei C die durch $\varphi(t) = e^{it} \cdot \sin(t)$ mit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gegebene Kurve. Berechnen Sie

$$\int_C \sin\left(\frac{z}{2}\right) dz.$$

(b) Sei C der mathematisch positiv durchlaufene Kreis mit Radius $R > 0$ und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_C \overline{P(z)} \, dz = 2\pi i R^2 \cdot \overline{P'(0)}.$$

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (1+2 Punkte)

Seien a, b positive reelle Zahlen und C die auf $[0, 2\pi]$ durch $\varphi(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ definierte Kurve. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a)
$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_{|z|=a} \frac{1}{z}\,dz,$$
wobei der Kreisweg mathematisch positiv zu durchlaufen sei,

(b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Für $R > 0$ seien die folgenden Kurven definiert:

$$\begin{aligned}
&C_1 : \varphi_1(t) = t && \text{mit } t \in (0, R]\,,\\
&C_2 : \varphi_2(t) = Re^{it} && \text{mit } t \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right],\\
&C_3 : \varphi_3(t) = te^{\frac{\pi i}{4}} && \text{mit } t \in [0, R]\,.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie
$$\int_{C_1} e^{iz^2}\,dz = \int_{C_3} e^{iz^2}\,dz - \int_{C_2} e^{iz^2}\,dz.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Integrale $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ und $\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ konvergieren, und bestimmen Sie ihren Wert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ verwenden.