

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

22. Mai 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 5

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

- (i) $f(z) = ae^{bz}$ ($\forall z \in D$) mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$,
- (ii) $f'(z) = bf(z)$ ($\forall z \in D$) mit einer Konstanten $b \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie die Gleichung

$$-\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} \quad (|z| < 1)$$

Aufgabe 3 (1+2 Punkte)

Für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ definieren wir

$$a^b := e^{b \operatorname{Log} a}.$$

Zeigen Sie

- (a) $i^i = e^{-\pi/2}$,
- (b) $(i(i-1))^i \neq i^i (i-1)^i$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $0 < a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie folgende Integrale, wo alle vorkommenden Kurven einfach und im mathematisch positiven Sinne zu durchlaufen sind:

$$(a) \int_{Q_2} \frac{1}{z-i} dz, \quad (b) \int_{|z|=a} \frac{1}{|z|^2} dz, \quad (c) \int_{|z|=2a} \frac{1}{z^2 - a^2} dz.$$

Mit Q_2 wird hier das achsenkreuzparallele Quadrat mit Seitenlänge 4 und Diagonalschnittpunkt im Ursprung bezeichnet.

Abgabe: 29. Mai, bis spätestens 14 Uhr ct.