Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

15. Mai 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 4

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie (mit Begründung) die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) z^n$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, $0 < R < \infty$. Geben Sie (mit Begründung) die Konvergenzradien folgender Potenzreihen an:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^{2n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seit $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi\nu}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung von $z^n - 1$ in n-te Einheitswurzeln.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin\left(\frac{1}{2}z\right) \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos(\nu z) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2} z\right)}.$$

Abgabe: 22. Mai, bis spätestens 14 Uhr ct.