Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

8. Mai 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 3

Sommersemester 2017

Nachfolgend wird mit z eine komplexe Zahl bezeichnet, und mit x und y deren Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z_0 \in \mathbb{C}$, in denen die folgenden auf $\mathbb{C}$ definierten Funktionen komplex differenzierbar sind:

(a) $f(z) = z|z|$, (b) $g(z) = x^2 + iy^2$,
(c) $h(z) = 2x - ix^2\cos(y)$, (d) $r(z) = zy$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nimmt f nur reelle oder rein imaginäre Werte an, so ist f konstant.

(b) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ (mit $D \subset \mathbb{C}$ offen) in $a \in D$ komplex differenzierbar und $D^* = \{z \in \mathbb{C};\ \bar{z} \in D\}$. Zeigen Sie, dass dann die durch

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})}$$

definierte Funktion $g : D^* \to C$ in $\bar{a}$ komplex differenzierbar ist, und dass gilt

$$g'(\bar{a}) = \overline{f'(a)}.$$

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die sich als Summe $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u, v \in \mathscr{C}^1(D)$ schreiben lässt. Wir setzen

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen:

Bitte wenden! ⟶

(a) f ist holomorph auf D genau dann wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

in D gilt.

(b) Seien nun $f, g : D \to \mathbb{C}$ beide zweimal komplex differenzierbar in ganz D. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \big(f \cdot \bar{g} \big) = f' \cdot \overline{g'} \qquad \text{in } D.$$