Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

2. Mai 2017

Funktionentheorie 1 – Übungsblatt 2

Sommersemester 2017

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{H} = \left\{ z \in \mathbb{C};\, \Im z > 0 \right\}$ und $\mathbb{E} = \left\{ z \in \mathbb{C};\, |z| < 1 \right\}$. Zu $\beta \in \mathbb{H}$ sei eine Abbildung $f_\beta : \mathbb{H} \to \mathbb{E}$ wie folgt gegeben

$$f_\beta(z) = \frac{z-\beta}{z-\bar{\beta}}.$$

Zeigen Sie: Die Abbildung f_β ist wohldefiniert und bijektiv mit $f_\beta(\beta) = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ heißt *verallgemeinerte Kreisline*, wenn sie durch eine Gleichug der folgenden Form gegeben ist:

$$\alpha\,|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \qquad \text{mit} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{und}\, \beta\bar{\beta} > \alpha\gamma.$$

Weisen Sie nach: Jede Kreisline der Form $K_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{C};\, |z - z_0| = r \right\}$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ lässt sich als verallgemeinerte Kreislinie mit $\alpha \neq 0$ schreiben und umgekehrt, d.h. jede verallgemeinerte Kreislinie mit $\alpha \neq 0$ lässt sich als Kreisline der $K_r(z_0)$ mit $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ schreiben.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ die Menge der reellen, invertierbaren 2×2-Matrizen mit positiver Determinante. Sei $\mathbb{H}$ die obere Halbebene aus Aufgabe 1. Man definiere für $z \in \mathbb{H}$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})^+$ eine Abbildung wie folgt:

$$M\langle z \rangle := \frac{az+b}{cz+d}.$$

Bitte wenden! $\longrightarrow$

Man zeige:

(a) Die Abbildung ist wohldefiniert und es gilt $M\langle z\rangle \in \mathbb{H}$.

(b) Man hat $(MN)\langle z\rangle = M\langle N\langle z\rangle\rangle$, wobei MN das Produkt der Matrizen M und N bezeichnet.

(c) Man folgere aus (b), dass $z \longmapsto M\langle z\rangle$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ darstellt.