Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

10. Juli 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 9

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei χ ein beliebiger Dirichletcharakter (nicht notwendigerweise reell). Zeigen Sie: Falls χ gerade ist, verschwindet der zweite Term in Formel für $L(1,\chi)$ aus Satz 11.3. Falls hingegen χ ungerade ist, verschwindet der erste Term.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Verifizieren Sie, dass die beiden Ideale $\mathfrak{p} = \left(2, 4+\sqrt{6}\right)$ und $\mathfrak{q} = \left(5, 4+\sqrt{6}\right)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ durch folgende $\mathbb{Z}$-Basen gegeben sind:

$$\mathfrak{p} = \mathbb{Z}\cdot 2 + \mathbb{Z}\cdot\sqrt{6}, \qquad \mathfrak{q} = \mathbb{Z}\cdot 5 + \mathbb{Z}\cdot\left(4+\sqrt{6}\right).$$

(b) Sei K ein quadratischer Zahlkörper und $(0) \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subsetneq \mathcal{O}_K$ ganze Ideale. Weisen Sie die Beziehung $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})\cdot N(\mathfrak{b})$ nach.

Hinweis: Verwenden Sie den chinesischen Restsatz. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass sich ganze Ideale (bis auf Reihenfolge) eindeutig in Primideale zerlegen lassen.

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf § 13 der Vorlesung. Für Sie gilt ein verlängerter Bearbeitungszeitraum, bis Montag 20.7.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie Satz 13.4. Nutzen Sie dazu die Beziehung

$$\zeta(s,A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n,f)}{n^s},$$

wobei f die der Idealklasse A zugeordnete quadratische Form bezeichnet. Verfeinern Sie dazu das geometrische Argument aus §10, um die asymptotische Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(n,f) = \kappa N + O\left(\sqrt{N}\right)$$

zu erhalten.

Abgabetermin für Aufgabe 1 und 2: 17. Juli, für Aufgabe 3: 20. Juli.