Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

3. Juli 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 8

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Sei $Q(x,y) = x^2 + xy - y^2$. Bestimmen Sie ein Element von unendlicher Ordnung in der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(Q)$.

(b) Zeigen Sie $h(-4) = 1$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Sei $Q(x,y) = ax^2 + bxy + c^2$ eine primitive quadratische Form der Diskriminante D. Weisen Sie folgende Beziehungen nach, die im Beweis von Satz 10.3 verwendet wurden:

(a) Sei $D < 0$, also $4ac > b^2$ und sei a positiv. Dann gilt

$$\iint_{ax^2+bxy+cy^2 \le N} dx\,dy = \frac{2\pi N}{\sqrt{4ac - b^2}}.$$

(b) Sei nun $D > 0$ und keine Quadratzahl. Weiter bezeichne $\varepsilon_0 = \frac{t_0 + u_0\sqrt{D}}{2}$ die Grundeinheit von Q, und seien θ und θ' durch

$$\theta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad \theta' = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

gegeben. Dann gilt

$$\iint_{\substack{x,y \ge 0 \\ y \le (\varepsilon_0^2 - 1)\left(\varepsilon_0^2\theta - \theta'\right)^{-1} \\ ax^2+bxy+cy^2 \le N}} dx\,dy = \frac{\log \varepsilon_0}{\sqrt{b^2 - 4ac}} N.$$

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte)

Sei D eine Fundamentaldiskriminante. Wie in der Vorlesung bezeichnen $R(n)$ bzw. $R^*(n)$ die Anzahlen der inäquivalenten bzw. inäquivalenten *primitiven* Darstellungen einer ganzen Zahl $n \neq 0$ durch Formen der Diskriminante D. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 10.1, indem Sie folgende Aussagen nachweisen:

(a) $R^*(n)$ ist multiplikativ.

(b) Ist p eine ungerade Primzahl mit $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, so gilt

$$R(p^r) = \sum_{0 \leq s \leq r} \chi_D\left(p^s\right).$$

(c) Es gilt $R(2^r) = \sum_{0 \leq s \leq r} \chi_D(2^s)$.