Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

26. Juni 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 7

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Weisen Sie folgende für $\Re(s) > 1$ gültige Gleichung nach:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\log(p)}{p^s} = s \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx,$$

wobei $\vartheta(x)$ die (erste) Tschebyscheff-Funktion $\vartheta(x) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \log(p)$ bezeichnet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie zunächst die Integraldarstellung ($\Re(s) > 1$)

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}} dx \quad \text{mit} \quad M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n),$$

und folgen Sie daraus, dass $\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \mu(n) = 0$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie den Taubersatz von Newman.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$s \mapsto s \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx \quad (\Re(s) > 0)$$

und weisen Sie nach, dass sie holomorph ist. Zeigen Sie dann, dass für $\Re(s) > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} - s \int_1^\infty \frac{B_1(x - \lfloor x \rfloor)}{x^{s+1}} dx,$$

wobei $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ das erste Bernoulli-Polynom bezeichnet.

Abgabe: 3. Juli 20, bis spätestens 12 Uhr