Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

5. Juni 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 6

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $S \subset \mathbb{P}$ eine beliebige unendliche Teilmenge der Primzahlen $\mathbb{P}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(t) = \sum_{p \in S} e^{-pt}$$

für $t \to 0$ keine asymptotische Entwicklung der Form

$$f(t) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} b_k t^k \qquad (t \to 0)$$

besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie Satz 7.1 aus der Vorlesung zusammen mit dem Satz von Landau, angewandt auf die Dirichletreihe $P_S(s) := \sum_{p \in S} p^{-s}$ $(\sigma > 1)$.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte)

Die *Bernoulli Polynome* werden durch

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

definiert. (Insbesondere gilt $B_n(0) = B_n$.) Weisen Sie folgende Eigenschaften nach:

(a) Es gilt $\frac{d}{dx} B_n(x) = n B_{n-1}(x)$ $(n \geq 1)$.

(b) Man hat $B_n(x+1) - B_n(x) = n x^{n-1}$ $(n \geq 1)$.

(c) Die erzeugende Funktion der Bernoulli Polynome ist durch

$$\frac{t e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

gegeben.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (2+1+1 Punkte)

Die *Hurwitz'sche Zetafunktion* sei durch $\zeta(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s}$ $(\sigma > 1, a > 0)$ definiert.

(a) Beweisen Sie die Integraldarstellung

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at}}{1-e^{-t}}\, dt.$$

(b) Folgern Sie, dass $\zeta(s,a)$ bei $s=1$ einen einfachen Pol mit Residuum 1 (unabhängig von a) hat, und sich $\zeta(s,a) - \frac{1}{s-1}$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt.

(c) Für die Werte an den nicht-positiven ganzzahligen Stellen von $\zeta(s,a)$ gilt

$$\zeta(-n,a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1} \qquad (n = 0,1,2,\ldots),$$

wobei $B_{n+1}(x)$ das $(n+1)$-te Bernoulli-Polynom bezeichnet.