Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

29. Mai 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 5

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Die von Mangold'sche Funktion $\Lambda(n)$ ist durch

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n = p^k \text{ mit } p \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie: $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$.

(b) Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Beweisen Sie für $\sigma = \Re(s) > 1$ die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}.$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Sei χ ein Dirichlet-Charakter modulo N. Weiter bezeichne $L'(s,\chi)$ die Ableitung der Dirichletschen L-Reihe $L(s,\chi)$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für $\sigma > 1$ gilt

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s},$$

wobei $\Lambda(n)$ die von Mangoldt'sche Funktion aus Aufgabe 1 ist.

Hinweis: Schreiben Sie die L-Reihe in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,N) = 1$. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_{n \equiv a \bmod N} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{1}{\phi(N)} \sum_{\chi \bmod N} \overline{\chi}(a) \frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)},$$

wobei die Summe auf der rechten Seite alle Dirichlet-Charaktere modulo N durchläuft.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie für $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$, dass

$$\zeta(\sigma)^3 \, |\zeta(\sigma + it)|^4 \, |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

Hinweis: Nutzen Sie die trigonometrische Identität $3 + 4\cos(x) + \cos(2x) = 2\,(1 + \cos(x))^2$.

(b) Folgern Sie, dass $\zeta(s)$ auf der Geraden $1 + it$ keine Nullstelle besitzt.