Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

22. Mai 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (1+2+1 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und r eine natürliche Zahl. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist die Primzahlpotenz $p^r \neq 2$, so gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$a \equiv 1 + bp^r \mod p^{r+1} \quad \Longrightarrow a^p \equiv 1 + bp^{r+1} \mod p^{r+2}.$$

(b) Ist p ungerade (d.h. $p > 2$), so sind die Einheitengruppen $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ zyklisch.

(c) Die Einheitengruppen $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$ sind für $r \leq 2$ zyklisch, für $r > 2$ sind sie hingegen nicht zyklisch, sondern haben die Struktur

$$(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z}.$$

Hinweis: Zu (a): Es gilt $p \mid \binom{p}{k}$ für $1 < k < p$. Zu (b) und (c): vollständige Induktion nach r.

Aufgabe 2 (1+3 Punkte)

Für eine ganze Zahl m bezeichne $q(m)$ die Anzahl der primitiven Dirichlet Charaktere modulo m.

(a) Zeigen Sie, dass für die Eulersche φ-Funktion gilt $\varphi(m) = \sum_{d \mid m} q(d)$.

(b) Für eine Primzahl p schreibe man $p \| m$, wenn gilt $p \mid m$ und $p^2 \nmid m$. Zeigen Sie, dass für $q(m)$ gilt

$$q(m) = m \prod_{p \| m} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \prod_{p^2 \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2.$$

(Wobei im Falle $m = 1$ leere Produkte als 1 zu lesen sind.)

Hinweis: Machen Sie sich zunächst klar, dass jeder Charakter modulo m entweder primitv oder von einem Charakter modulo d mit $d \mid m$ und $d \neq m$ induziert wird. Verwenden Sie dann die Möbius'sche Umkehrformel; die Ergebnisse von Aufgabe 3(b) aus Blatt 2 dürfen benutzt werden.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (1+2+1 Punkte)

Die *Ramanujan Summe* $c_N(n)$ sei für $n, N \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert

$$c_N(n) := \sum_{\substack{m \,(\mathrm{mod}\, N) \\ (m,N)=1}} e^{2\pi i mn/N}.$$

Sie lässt sich in beiden Umbestimmten als zahlentheoretische Funktion auffassen.

(a) Weisen Sie zunächst folgende Gleichheit nach

$$\sum_{d|N} c_{N/d}(n) = \sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i \frac{nm}{N}}.$$

(b) Beweisen Sie nun, dass

$$c_N(n) = \sum_{d|(n,N)} d \cdot \mu\left(\frac{N}{d}\right).$$

Hinweis: Möbius'sche Umkehrformel!

(c) Zeigen Sie, dass $c_N(n)$ für festes n in N multiplikativ ist, also dass

$$c_N(n) \cdot c_M(n) = c_{MN}(n)$$

für alle $N, M \in \mathbb{N}$ mit $(N, M) = 1$ gilt.