Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann, Johann Franke

15. Mai 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 3

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (1+2+1 Punkte)

In dieser Aufgabe soll ein anderer Beweis für die meromorphe Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ für $\sigma = \Re(s) > 0$ gegeben werden.

Es bezeichne $\psi(s)$ die in Aufgabe 2.1 eingeführte Dirichletreihe, also $\psi(s) = \sum(-1)^{n-1}n^{-s}$ mit Konvergenzabszisse $\sigma_0 = 0$.

(a) Zeigen Sie: Für $\sigma > 1$ gilt $\psi(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s)$.

(b) Weisen Sie die Integraldarstellung

$$\psi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt \quad (\sigma > 0)$$

nach.

(c) Folgern Sie die Fortsetzbarkeit von $\zeta(s)$ für $\sigma > 0$.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte)

Eine die multiplikative zahlentheoretische Funktion $\chi(n)$ werde definiert durch

$$\chi(n) := \begin{cases} +1 & n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & n \equiv -1 \pmod 4, \\ 0 & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Weiter sei $L(s)$ die für $\sigma = \Re(s) > 1$ erklärte Dirichletreihe mit Koeffizienten $\chi(n)$

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - + \dots.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für die Konvergenzabszisse σ_0 von $L(s)$ gilt $\sigma_0 \le 0$.

(b) Es gilt die Inregraldarstellung

$$L(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t + e^{-t}} dt \quad (\sigma > 0).$$

(c) $L(s)$ besitzt eine *holomorphe* Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)

Die *Eulerschen Zahlen* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ werden als Koeffizienten der folgenden Reihenentwicklung definiert:

$$\frac{1}{\cosh(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n \quad \left(|t| < \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Sei nun $L(s)$ die in der vorherigen Aufgabe eingeführte Dirichletreihe. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $E_n = 0$ für n ungerade.

(b) Für die Werte von $L(s)$ an den nicht-positiven ganzzahligen Stellen gilt $L(-n) = \frac{1}{2}E_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Hinweis: Nutzen Sie entweder einen modifizierten Integrationsweg in 2 b) und den Residuensatz, oder verwenden Sie die Relation

$$\frac{1}{\cosh(t)} - \sum_{n=0}^{N} \frac{E_n}{n!} t^n = \mathrm{O}\left(t^{N+1}\right) \quad \text{für } t \to 0.$$