Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

8. Mai 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 2

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie ohne Benutzung des Satzes über die Konvergenzabszisse aus der Vorlesung, dass die gewöhnliche Dirichletreihe

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots$$

die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = 0$ hat. Untersuchen Sie dazu zunächst die Konvergenz für $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$.

Aufgabe 2 (2+1+1 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion und g eine zahlentheoretische Funktion mit

$$\big(f * g\big)(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g multiplikativ ist und vervollständigen Sie den Beweis, dass multiplikative zahlentheoretische Funktionen unter Faltung eine Gruppe bilden.

(b) Sei f eine multiplikative zahlentheoretische Funktion. Zeigen Sie: Genau dann ist f streng multiplikativ wenn $f(p^n) = f(p)^n$ für jede Primzahl p und jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Durch $n \mapsto n^k$ wird offensichtlich eine zahlentheoretische Funktion definiert, die streng multiplikativ ist. Untersuchen Sie die Multiplikativitätseigenschaften der zugehörigen summatorischen Funktion.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie

$$\sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ quadratfrei}}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1+p^{-s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \qquad (\Re(s)>1).$$

(b) Sei φ die Eulersche φ-Funktion, d.h. $\varphi(n) = \sharp\{1 \leq k \leq n;\ (k,n)=1\}$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Reihentwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \quad (\Re(s)>2).$$

Hinweis: Die Eulersche φ-Funktion ist multiplikativ und für Primzahlpotenzen gilt $\varphi(p^m) = p^{m-1}(p-1)$.