Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

30. April 2020

Analytische Zahlentheorie – Übungsblatt 1

Sommersemester 2020

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Mit Hilfe des Primzahlsatzes $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ $(x \to \infty)$ beweise man folgende Aussage:
Sei p_n die n-te Primzahl $(n \geq 1)$, so gilt $p_n \sim n \log n$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{1-z} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2^n}\right).$$

(b) Zeigen Sie die für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gültige Gleichung

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n,$$

wobei mit $p(n)$ die Partitionsfunktion bezeichnet ist, d.h. $p(0) = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ ist $p(n)$ die Anzahl der der Partitionen von n, also die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, n als Summe positiver ganzen Zahlen darzustellen, wobei Permutationen nur einmal gezählt werden. Zum Beispiel $p(5) = 6$, denn

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1.$$

(Dabei zählen beispielsweise $3+1+1$, $1+3+1$ und $1+1+3$ nur als eine Partition.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Weisen sie folgende Gleichheit nach:

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) y^{-s} ds \quad (y > 0).$$

Hinweis: Residuensatz. Verwenden Sie als Integrationskontur die Kurve

$$\left\{c + it;\, t \in [-R, R]\right\} \cup \left\{c + Re^{i\phi};\, \phi \in [\pi/2, 3\pi/2]\right\}.$$

Abgabe: 8. Mai 2020, bis spätestens 12 Uhr