Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

5. Juli 2019

Analysis 2 – Übungsblatt 11

Sommersemester 2019

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Sei α eine reelle Zahl. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$:

(i) f ist homogen vom Grade α, d.h. es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad (\forall x \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+).$$

(ii) Es gilt[1]

$$\operatorname{grad}\big(f(x)\big) \cdot x = \alpha f(x) \quad (\forall x \neq 0).$$

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung F der Klasse $\mathscr{C}^1$ angehört und berechnen Sie $\operatorname{grad} f(0,0)$.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_{12}(x,y)$ und $f_{21}(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und bestätigen Sie deren Gleichheit.

(c) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $f_{12}(0,0)$ und $f_{21}(0,0)$ existieren, und weisen Sie nach, dass diese nicht übereinstimmen.

Bitte wenden! ⟶

[1] Die Notation '·' bezeichnet hierbei das Skalarprodukt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien U eine offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$, f eine Funktion mit $f \in \mathscr{C}^{q+1}(0)$ und $a, b \in R_+$. Zeigen Sie: Die Taylorentwicklung der Funktion $g(x,y) := f(ax+by)$ um $(0,0)$ ist von der Form

$$g(x,y) = \sum_{m=0}^{q} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (ax)^j \, (by)^{m-j} + R_{q+1}(x,y).$$

Berechnen Sie das Restglied R_{q+1}.