Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

21. Juni 2019

Analysis 2 – Übungsblatt 9

Sommersemester 2019

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Seien X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Sind X kompakt und A abgeschlossen, so ist auch A kompakt.

(b) Der topologische Raum A (versehen mit der induzierten Topologie) ist genau dann kompakt, wenn A eine kompakte Teilmenge von X ist.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Seien $(X, \{\mathscr{F}_x\}_{x\in X})$ und $\big(Y, \{\mathscr{G}_y\}_{y\in Y}\big)$ topologische Räume. Zeigen Sie:

(a) Das Paar $\big(X\times Y, \{\mathscr{T}_{(x,y)}\}_{(x,y)\in X\times Y}\big)$ mit

$$\mathscr{T}_{(x,y)} := \big\{U \times V\,;\, U \in \mathscr{F}_x, V \in \mathscr{G}_y\big\} \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in X \times Y$$

ist ein topologischer Raum.

Bemerkung: Man sagt, das mengentheoretische Produkt $X \times Y$ wird mit der *Produkttopologie* versehen.

(b) Sind X und Y kompakt, so ist auch $X \times Y$ kompakt.

Hinweise zu (b)

1. Der topologische Raum $\{x\} \times Y$ $(\forall x \in X)$, versehen mit der von $X \times Y$ induzierten Topologie, ist kompakt.

2. Sei $\{W_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. O.b.d.A. kann man annehmen, dass die Mengen W_i von der Form $U_i \times V_i$ sind, mit offenen Teilmengen U_i von X und V_i von Y.

   Es existiert zu jedem $x \in X$ eine *endliche* Teilmenge $I_x \subset I$, mit $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i\in I_x} W_i =: W_x$. Für $U_x := \bigcap_{i\in I_x} U_i$ $(x \in X)$ gilt $p^{-1}(U_x) \subset W_x$, wobei p die Projektion auf die x-Koordinate bezeichnet.

   Das System $\{U_x\}_{x\in X}$ ist eine offene Überdeckung von X. Benutzen Sie nun die Kompaktheit von X, um eine endliche Teilmenge $I' \subset I$ mit $\bigcup_{i\in I'} W_i = X \times Y$ zu konstruieren.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und seien A_i $(i \in I)$ zusammenhängende Teilmengen, die einen Punkt gemeinsam haben. Zeigen Sie, dass dann die Vereinigung der A_i zusammenhängend ist.