Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

7. Juni 2019

Analysis 2 – Übungsblatt 7

Sommersemester 2019

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Paar (X, d), bestehend aus einer nichtleeren Menge X und einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, heißt *metrischer Raum*, wenn für $x, y, z \in X$ folgende Axiome erfüllt sind:

(i)	$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$	(Definitheit)
(ii)	$d(x,y) = d(y,x)$	(Symmetrie)
(iii)	$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$	(Dreicksungleichung)

Für jedes $x \in X$ seien die Mengen

$$\mathrm{U}_\delta(x) := \left\{ y \in X \,;\, d(x,y) < \delta \right\} \quad \text{sowie} \quad \mathscr{F}_x := \left\{ \mathrm{U}_\delta(x) \,;\, \delta \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

definiert. Weiter heiße eine Teilmenge $A \subset X$ *offen*, wenn jeder Punkt $x \in A$ ein innerer Punkt von A ist (d.h. es gibt ein $\delta > 0$, sodass $\mathrm{U}_\delta(x) \subset A$).

Zeigen Sie: Ist (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt:

i) X und die leere Menge sind offen.

ii) Die Vereiningung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

iii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Aufgabe 2 (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils das Innere, den Rand und den Abschluss folgender Teilmengen von $\mathbb{R}^2$:

(a) $A_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \cup \left\{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < 2 \right\}$,

(b) $A_2 := \left\{ (x, e^x) \,;\, -5 < x \leq 3 \right\}$,

(c) $A_3 := \big([0,1] \times [0,1] \big) \cap \mathbb{Q}^2$,

(d) $A_4 := \left\{ (x,0) \,;\, x \in \mathbb{R} \right\}$.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)

(a) Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, d.h. es gilt $x_m \in A$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Weisen Sie nach: Ist die Folge konvergent mit Grenzwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so gilt $x_0 \in \overline{A}$.

(b) Beweisen Sie folgende Aussagen für eine Familie $\{A_i\}_{i\in I}$ von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$:

$$\text{(i) } \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii) } \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem in (ii) nicht Gleichheit gilt.