Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

24. Mai 2019

Analysis 2 – Übungsblatt 5

Sommersemester 2019

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

konvergiert für $|x| < 1$, und die durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

definierte Funktion $f : \mathrm{U}_1(0) \to \mathbb{R}$ ist ganzrational, d.h. Quotient zweier Polynomfunktionen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $0 \leq r \leq \infty$, so dass alle bis auf endlich viele Koeffizienten a_n von 0 verschieden sind. Ferner existiere der Grenzwert

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

Zeigen Sie: Dann gilt

$$r = \frac{1}{\rho} ,$$

wobei der Ausdruck $\frac{1}{0}$ als ∞ und der Ausdruck $\frac{1}{\infty}$ als 0 aufzufassen sind.

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die folgendermaßen definierte Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch vollständige Induktion, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom P_n existiert, so dass

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{für} \quad x \neq 0.$$

Benutzen Sie dann Aufgabe 2.1.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass eine Funktion nicht notwendigerweise durch ihre Taylorreihe in deren Konvergenzbereich dargestellt werden muss.