Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

3. Mai 2019

Analysis 2 – Übungsblatt 2

Sommersemester 2019

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $I = [a, b]$ $(a < b)$ ein Intervall und $x_0 \in I$ ein Punkt. Die stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $I \setminus \{x_0\}$ differenzierbar, und es existiere der Grenzwert

$$\alpha := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x) \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Die Funktion f ist in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = \alpha$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(s, c) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ ein Funktionenpaar, welches folgenden Bedingungen genügt:

$$s' = c, \quad c' = -s, \quad s(0) = 0 \quad \text{und} \quad c(0) = 1. \tag{*}$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $s^2(x) + c^2(x) = 1$.

(b) Die Funktionen s und c sind durch die Bedingungen (*) eindeutig bestimmt.

Hinweis: Ist $(\tilde{s}, \tilde{c})$ ein weiteres Funktionenpaar, welches (*) genügt, dann betrachten Sie die Funktion $f(x) = (s(x) - \tilde{s}(x))^2 + (c(x) - \tilde{c}(x))^2$ und deren Ableitung.

(c) Es gilt $s, c \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, sowie $s(-x) = -s(x)$ und $c(-x) = c(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Additionstheoreme

$$s(x + y) = s(x)\, c(y) + c(x)\, s(y), \qquad c(x + y) = c(x)\, c(y) - s(x)\, s(y).$$

Bitte wenden! ⟶

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Zahl π wurde in der Vorlesung definiert als

$$\pi := 2 \cdot \lim_{y \to 1-} A(y),$$
$$\text{mit} \quad A(y) := \int_0^y \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (|y| < 1).$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$\pi = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-v^2}\, dv,$$

d.h. π ist der „Flächeninhalt der Einheitskreises“.

Hinweis: Weisen Sie zunächst nach, dass die Funktion $\Phi(v) := \frac{1}{2}\left(A(v) + v\sqrt{1-v^2}\right)$ für alle $\varepsilon > 0$ auf dem Intervall $[0, 1-\varepsilon]$ eine Stammfunktion von $\sqrt{1-v^2}$ ist.