Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

18. Januar 2019

Analysis 1 – Übungsblatt 12

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie das *Majorantenkriterium von Weierstraß.*
Sei $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : M \to \mathbb{R}$ auf einer nichtleeren Teilmenge M von $\mathbb{R}$, und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit

$$\left|f_n(x)\right| \le a_n \quad \text{für alle } n \in N \text{ und alle } x \in M.$$

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dann konvergiert die Funktionenfolge $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig absolut auf M.

Aufgabe 2 (1+2+1 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der angegebenen punktweise konvergenten Folgen von Funktionen auf $\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$ gleichmäßig konvergieren. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x},$

(b) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx},$

(c) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}.$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{für } \; x \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ 2-nx & \text{für } \; x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \\ 0 & \text{für } \; x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie die Graphen von $f_1, f_2, \ldots, f_5$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Zeigen Sie, dass alle f_n stetig sind, und die Folge f_n punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert.

(c) Entscheiden Sie, ob die Folge $\left(f_n\right)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: 25. Februar , bis spätestens 11 Uhr ct.