Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

11. Januar 2019

Analysis 1 – Übungsblatt 11

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, und sei $\mathscr{B}(M)$ die Menge der beschränkten Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Definiert man Addition und Skalarmultiplikation wie in der Vorlesung, so wird $\mathscr{B}(M)$ ein reeller Vektorraum.

(b) Durch $\|f\|_M := \sup_{x\in M} |f(x)|$ $(f \in \mathscr{B}(M))$ wird eine Norm auf $\mathscr{B}(M)$ definiert.

(c) $\mathscr{B}(M)$ ist *vollständig* bezüglich der Norm aus (b).

Hinweis: Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert. Unter einer Cauchy-Folge versteht man hierbei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V, für die gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\|a_n - a_m\| < \epsilon, \forall n, m > N$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit der ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit, dass die Quadratwurzelfunktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ stetig ist.

(b) Seien f, g stetige reellwertige Funktionen auf einem kompakten Intervall I. Zeigen Sie, dass die Maximumsfunktion $\max_{f,g} : I \to \mathbb{R}$, $\max_{f,g} = \max\{f(x), g(x)\}$ stetig ist.

Aufgabe 3 (1+3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass

$$\left|f(x) - f(x')\right| \leq L\left|x - x'\right|, \quad (\forall x, x' \in M).$$

Beweisen Sie: Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit. Die Umkehrung gilt nicht (geben Sie ein Gegenbeispiel mit Begründung an).

Abgabe: 18. Januar, bis spätestens 11 Uhr ct.