

Analysis 1 – Übungsblatt 10

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right).$$

(b) Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung und $a \neq 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie:

$$\text{Wenn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = c \text{ existiert, so gilt } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)}{x} = ac.$$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Sei $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ definiert durch

$$z(x) := \begin{cases} 4x & \text{für } x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \\ 2-4x & \text{für } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \end{cases}$$

und dann periodisch fortgesetzt durch $z(x+1) = z(x)$.

Ferner sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} z\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Zeichnen Sie ein möglichst „genaues“ Bild des Graphen von f im Intervall $[-5, 5]$.
- (b) Zeigen Sie, dass f bei $x = 0$ *oszilliert*, d.h. in jeder δ -Umgebung $U_\delta(0)$ nimmt f jeden Wert aus dem Intervall $[-1, 1]$ unendlich oft an.

Bitte wenden! →

Abgabe: 11. Januar, bis spätestens 11 Uhr ct.

Bemerkung: Für die folgende Aufgabe sei kurz daran erinnert, dass jede *rationale* Zahl $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, sich eindeutig als *gekürzter Bruch* in der Form $\frac{p}{q}$ schreiben lässt, mit p, q , teilerfremden ganzen Zahlen und $q > 0$. *Irrational* nennt man genau diejenigen reellen Zahlen $\neq 0$, die über keine solche Darstellung verfügen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ sei folgendermaßen definiert:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational ist.} \end{cases}$$

(Hierbei ist $\frac{p}{q}$ ein gekürzter Bruch.)

Geben Sie mit Beweis alle Stellen an, an denen f stetig ist.

Wir wünschen allen Hörerinnen und Hörern der Analysis 1
besinnliche Feiertage und ein gutes neues Jahr!