Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

14. Dezember 2018

Analysis 1 – Übungsblatt 9

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (3+1 Punkte)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $b_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), so dass die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0$.
Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ist konvergent} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{ist konvergent.}$$

(b) Konvergiert folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Teil (a).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf bedingte und unbedingte Konvergenz. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen dergestalt, dass die Folge $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Folge $\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ ($n \to \infty$).

Abgabe: 21. Dezember , bis spätestens 11 Uhr ct.