Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

7. Dezember 2018

Analysis 1 – Übungsblatt 8

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (3+1 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ist konvergent} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} \quad \text{ist konvergent.}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren; begründen Sie Ihre Entscheidung:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n, \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}.$$

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Nach dem Leibnitz'schen Konvergenzkriterium konvergiert die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Sei a ihr Wert.

Weiter seien zwei Umordnungen dieser Reihe wie folgt definiert:

$$S_1 := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$
$$S_2 := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$

Weisen Sie nach, dass S_1 und S_2 konvergent sind, und ihre Werte durch $S_1 = a$ und $S_2 = \frac{1}{2}a$ gegeben sind.

Abgabe: 14. Dezember , bis spätestens 11 Uhr ct.