Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

30. November 2018

Analysis 1 – Übungsblatt 7

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, und M sei die Menge ihrer Häufungspunkte. Zeigen Sie, dass $\sup M \in M$ und $\inf M \in M$ gelten.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Für $a \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ sei rekursiv die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen durch

$$a_1 := a,$$
$$a_{n+1} := 2 - \frac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definiert. Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wohldefiniert, d.h. die obige Rekursion ist für alle $n \in \mathbb{N}$ sinnvoll; außerdem ist die Folge monoton fallend und beschränkt.

(b) Sie konvergiert gegen den Grenzwert 1.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $a \geq 0$, $b \geq 0$ relle Zahlen. Die Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seinen rekursiv durch

$$a_1 := a,\ b_1 := b, \quad a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

definiert.

Weisen Sie nach: Beide Folgen sind konvergent und haben den selben Grenzwert

Bemerkung Dieser Grenzwert wird als arithmetisch-geometrisches Mittel von a und b bezeichnet.

Abgabe: 7. Dezember, bis spätestens 11 Uhr ct.