Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

16. November 2018

Analysis 1 – Übungsblatt 5

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert a. Zeigen Sie:

(a) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Umordnung der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a.

(b) Ist $\left(a_{n_\mu}\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann konvergiert die Folge $\left(a_{n_\mu}\right)_{\mu\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen a.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

konvergiert, und es gilt $\lim b_n = a$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$a_n := \frac{3n^3 - 5n^2 + 6(-1)^n}{5n^3 - 3n} \quad \text{und} \quad b_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

konvergieren und bestimmen Sie deren Grenzwert.

Erläuterung zu Aufgabe 1 Die Begriffe *Umordnung* und *Teilfolge* sind wie folgt definiert:

Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Umordnung* einer anderen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine bijektive Abbildung $n \to \sigma(n)$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt, mit $b_n = a_{\sigma(n)}$.

Eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Teilfolge* einer anderen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine (injektive) Abbildung $\mu \to n_\mu$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt, mit $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$ und $b_\mu = a_{n_\mu}$.

Abgabe: 23. November, bis spätestens 11 Uhr ct.