Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Winfried Kohnen
Dr. Eric Hofmann

26. Oktober 2018

Analysis 1 – Übungsblatt 2

Wintersemester 2018

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Für diese Aufgabe wird formal $\sharp\emptyset := 0$ gesetzt, d.h. die Kardinalität der leeren Menge ist Null.

(a) Seien M, M' endliche Mengen. Zeigen Sie: Gilt $M \sim M'$, dann gilt $\sharp M = \sharp M'$ und umgekehrt.

(b) Sei M eine endliche Menge, und M' eine Teilmenge von M.

Zeigen Sie: Auch M' ist eine endliche Menge, und es gilt $\sharp M' \leq \sharp M$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $M' = M$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung für natürliche Zahlen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m,n) &\longmapsto 2^m 3^n \end{aligned}$$

injektiv ist. Folgern Sie hieraus, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte)

(a) Bestimmen Sie (mit Nachweis) alle $n \in \mathbb{N}$, für welche $n^2 < 2^n$ gilt.

(b) **Behauptung:** Alle Pferde haben die selbe Farbe.
Beweis: Sei X eine endliche Menge von Pferden. Wir beweisen mit Induktion nach $\sharp X = n$, dass alle Pferde in X die selbe Farbe haben.
Induktionsanfang: ($n = 1$) Das ist offensichtlich.
Induktionsschritt: ($n \to n+1$) Sei X eine Menge von Pferden mit $n+1$ Elementen. Wir wählen eine beliebige Teilmenge $A \subsetneq X$ mit n Elementen aus. Nach Induktionsvoraussetzung haben alle Pferde in A die selbe Farbe. Nun wählen wir eine andere Teilmenge $B \subsetneq X$, die ebenfalls n Elemente enthält, so aus, dass ein Pferd in beiden Teilmengen A und B enthalten ist. Wiederum ist die Farbe aller Pferde in B dieselbe und diese muss gleich der Farbe der Pferde in A sein. Also haben alle Pferde in X die selbe Farbe.

Ist die Argumentation korrekt? Wenn nein, wo genau steckt der Fehler?

Abgabe: 2. November, bis spätestens 11 Uhr ct.