Seminarprogramm Dirichletreihen

SS 2022

PD Dr. Eric Hofmann

2. Mai 2022

Voraussetzungen: Funktionentheorie 1. Für einige Vorträge ist auch etwas Algebra von Nutzen.

Anspruch: Das Seminar ist sowohl für den Bachelor- als auch für den Masterstudiengang Mathematik anrechenbar. Einige Vorträge, die sich gut für die Einbringung als Masterseminar eignen, sind nachfolgend mit $*$ gekennzeichnet. Grundsätzlich ist dies auch bei den anderen Vorträgen möglich, ggf. wären dabei noch einige inhaltliche Ergänzungen wünschenswert.

Organisatorisches: Das Seminar findet als Blockseminar in der vorlesungsfreien Zeit des SS 2022 statt. Die Betreuung im Vorfeld findet per Email sowie, nach Vereinbarung, per Videochat statt.

Geplanter Termin[1] für das Blockseminar: 8.8-10.8 jeweils ganztägig. Ort: Ein Seminarraum im Mathematikon.

Einleitung

Dirichletreihen[2] spielen eine wichtige Rolle in der analytischen Zahlentheorie und vielen weiteren Bereichen der Mathematik.

Sozusagen des Paradebeispiel ist die *Riemannsche Zetafunktion*[3]:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1.$$

Sie steht im Mittelpunkt der berühmten Riemannvermutung, eines der Millennium Probleme. Klassische Anwendung finden sich beispielsweise in der Theorie der Primzahlverteilung (siehe z.B. [BF], Kapitel 7). Auch wir werden uns in Vortrag 4 mit dieser wichtigen Dirichletreihe beschäftigen.

[1] Unter Vorbehalt, bis ein Raum fest gebucht ist.
[2] J. P. G. Lejeune Dirichlet, 1805-1859
[3] B. Riemann, 1826-1866

Allgemeiner betrachten wir in diesem Seminar die *gewöhnlichen Dirichletreihen*, dies sind Reihen der Form $\sum_{n\geq 1} a(n)n^{-s}$, siehe Vortrag 1. Neben den analytischen Eigenschaften, etwa dem Bereich absoluter Konvergenz, ergeben sich weitere formale Eigenschaften aus denen der Koeffizienten $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Besonders interessant ist der Fall, dass die Koeffizienten $a(n)$ durch eine multiplikative zahlentheoretische Funktion erklärt sind, also durch eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^\times, n \mapsto a(n)$ mit $a(nm) = a(n)a(m)$, falls n und m teilerfremd sind, wir werden uns damit in Vortrag 2 befassen. In diesem besitzt Fall besitzt die Dirichletreihe eine unendliche Produktentwicklung.

Es kann sich sich eventuell in diesem Zusammenhang lohnen, sich die entsprechenden Begriffe aus der Funktionentheorie in Erinnerung zu rufen, beispielsweise den Konvergenzbegriff für unendliche Produkte (siehe etwa [K21], Abschnitt 8). Gleiches gilt für den Weierstraßschen Produktsatz, den wir auch benötigen werden.

Nach der Riemannschen Zetafunktion werden wir uns in den folgenden Vorträgen mit den *Dirichletschen L-Reihen* befassen, deren Koeffizienten Dirichlet-Charaktere sind, siehe Vortrag 5, d.h. Gruppencharakter zu Gruppen der Form $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ ($N \in \mathbb{N}$). Zu ihren wichtigsten Anwendungen gehören der Dirichletsche Primzahlsatz, außerdem sind sie eng verbunden mit Problem aus Theorie quadratischer Formen, etwa Klassenzahlen betrifft und die Darstellungsanzahl ganzer Zahlen durch quadratische Formen. Wir werden uns im weiterem Verlauf des Seminars mit diesen Themen auseinandersetzen, und dabei ganz natürlich zu Theorie quadratischer Körper kommen, d.h. Körperweiterungen von $\mathbb{Q}$ der Form $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, siehe Vortrag 11, und lernen dann nochmal eine wichtige Verallgemeinerung der Zetafunktion $\zeta(s)$ kennen, nämlich die *Dedekindsche Zetafunktion*[4] $\zeta_K(s)$.

Zum Schluss sei noch kurz auf einen weiteren äußerst interessanten Themenkomplex verwiesen, den wir in diesem Seminar nicht mehr behandeln werden, nämlich die Anwendung der Dirichlet Reihen in der Theorie der Modulformen (näheres siehe Vorlesungen zu Modulformen im MaMpf, oder Lehrbücher wie etwa [KK]).

Zur Literatur: Grundlage des Seminars ist das Buch von Zagier [Z81]. Im Buch von Serre [S73] findet sich in Kapitel VI eine recht kompakte, aber auch anspruchsvolle Behandlung der wesentlichen Themen. Das Buch von Neukirch [N92], Kapitel VII, ist als weiterführende Quelle ebenfalls empfehlenswert, übersteigt jedoch deutlich den Rahmen des Seminars.

1 Dirichletreihen: Analytische Theorie

Wir führen den Begriff der *Dirichletreihe* ein, welcher in der analytischen Zahlentheorie eine ähnlich große Bedeutung einnimmt, wie derjenige der Potenzreihe in der Funktionentheorie. Ein Spezialfall, der für dieses Seminar besonders wichtig ist, sind die sogenannten *gewöhnlichen Dirichletreihen*. Sie haben die Eigenschaft, immer in einer

[4] R. Dedekind, 1831-1916)

rechten Halbebene der komplexen Zahlenebene, der Form $\Re(s) > \sigma_0$[5] absolut konvergent zu sein. Die Gerade $\Re(s) = \sigma_0$ heißt *Konvergenzabszisse*. Auf dieser Gerade ist für bestimmte Dirichletreihen das Auftreten einer Singularität garantiert, nach dem *Satz von Landau*, den wir ebenso wie den *Identitätssatz* für Dirichletreihen zeigen wollen.
Literatur: Abschnitt 1 in [Z81]. *Ergänzend:* [S73], VII §2.

2 Dirichletreihen: Formale Eigenschaften

Man kann, zunächst rein formal betrachtet, die Summe von Dirichlet Reihen bilden und ein Produkt einführen, letzteres als multiplikative Faltung. Wir werden sehen, dass die Summe zweier konvergenter Dirichletreihen ebenfalls konvergiert, und auch ihr Produkt eine konvergente Dirichletreihe ist, wenn zumindest einer der beiden Faktoren absolut konvergiert.

Anschließend werden wir *multiplikative* und *streng multiplikative* Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ anhand von Beispielen kennenlernen. Dirichletreihen, deren Koeffizienten durch eine multiplikative Funktionen gegeben sind, lassen sich durch ein *Eulerprodukt* darstellen, ein unendliches Produkt, welches über alle Primzahlen läuft.

Schließlich zeigen wir noch die *Möbiussche Umkehrformel*, die es ermöglicht, multiplikative Funktionen ineinander zu überführen, und damit z.B. Relationen zwischen Dirichletreihen aufzufinden.
Literatur: Abschnitt 2 in [Z81]. *Ergänzend:* [S73], VI (§ 2,) § 3.1.

3 Die Gammafunktion

Nun führen wir die Gammafunktion ein, und zeigen ihre wichtigsten Eigenschaften.
Literatur: Abschnitt 3 in [Z81], oder [BF], Kapitel IV.1.

4 Die Riemannsche Zetafunktion

Das vielleicht einfachste, dennoch aber äußerst wichtige, Beispiel für eine Dirichletreihe ist die Zetafunktion. Alle uns schon bekannten Resultate über Dirichletreihen wollen wir an diesem Beispiel noch einmal nachweisen. Außerdem werden wir die Werte der Zetafunktion an denjenigen ganzzahligen Stellen bestimmen, für welche diese bekannt sind[6]

Die Zetafunktion besitzt eine weitere wichtige Eigenschaft, die für weiteren Beispiele im Laufe des Seminars wegweisend ist: Sie hat nämlich eine Funktionalgleichung, durch welche sie sich auch analytisch fortsetzen lässt.

[5] Im Zusammenhang mit Dirichletreihen wird die komplexe Variable meist mit s, statt wie gewohnt z, bezeichnet.

[6] Über die Zetawerte an den restlichen ganzzahligen Stellen weiß man (auch heute noch) sehr wenig.

Wir wollen zumindest eine Heuristik dafür angeben, warum diese Funktionalgleichung gilt, und einen Beweis nach Möglichkeit skizzieren.
Literatur: [Z81], Abschnitt 4. Einen Beweis für die Funktionalgleichung (15) ist in Aufgabe 2 zu finden. *Ergänzend:* [S73], VI § 3.2, [N92], VII §1.

5 Charaktere

Die Dirichletschen L-Reihen stellen ebenfalls Beispiele für Dirichletreihen dar. Sie verallgemeinern in gewissem Sinne die Riemannsche Zetafunktion. Wir werden Sie in den folgenden Vorträgen studieren und sehen, wie sich mit ihrer Hilfe bedeutende zahlentheoretische Aussagen beweisen lassen (siehe die Vorträge 7 und 10).

Die Koeffizienten dieser L-Reihen heißen *Dirichlet-Charaktere* und sind Gruppencharaktere zu den Restklassengruppen $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ für $N \in \mathbb{N}$. Wir führen zunächst allgemein *Gruppencharaktere* für endliche Gruppen ein, und zeigen: Ist G eine endliche abelsche Gruppe, so stellt die Menge ihrer Charaktere[7] eine zu G isomorphe Gruppe dar. Hierzu benötigt man den Struktursatz über endliche Abelsche Gruppen aus der Algebra. Danach spezialisieren wir auf den Spezialfall der Dirichlet-Charaktere. Wir zeigen bestimmte Orthogonalitätsrelation und führen den Begriff des *primitiven Charakters* ein. Abschließend ermitteln wir alle reellen primitiven Dirichlet-Charaktere.
Literatur: Abschnitt 5 in [Z81]. *Ergänzend:* [S73] VI §1.

6 Dirichletsche L-Reihen

Wie schon angekündigt, wollen wir uns nun mit den Dirichletschen L-Reihen befassen. Deren Eulerproduktentwicklung ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Charaktere. Für den *Hauptcharakter* χ_0 ist die L-Reihe $L(\chi_0, s)$ gleich der Zetafunktion. Hingegen werden wir für jeden von χ_0 verschiedenen Charakter χ als erstes wichtiges Resultat zeigen, dass $L(\chi, s)$ an der Stelle $s = 1$ nicht verschwindet. Als Korollar ergibt sich der Dirichletsche Primzahlsatz: *Sei* $n \in \mathbb{N}$, *dann gibt es in jeder Folge der Art* $a + kn$, $k = 1, 2, \ldots$ *mit* $a \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$, *unendlich viele Primzahlen.*

(In der Tat war der Beweis diese Aussage die ursprüngliche Motivation für die Einführung solche L-Reihen durch Dirichlet.)
Literatur: Abschnitt 6 in [Z81]. *Ergänzend:* [S73], VI §3.3, [N92] VII §2.

7 Werte von L-Reihen an negativen ganzen Stellen $*$

Ähnlich wie in Vortrag 4 für die Zetafunktion wollen wir hier, für Dirichletsche L-Reihen deren Werte an negativen ganzzahligen Stellen (sowie bei $s = 0$) untersuchen. Wir erhalten eine explizite Formel, in der außer Charakterwerten auch die bereits vertrauten Bernoulli-Zahlen auftauchen.

[7] Man nennt dies die (zu G) *duale Gruppe* $\hat{G}$.

Literatur: Abschnitt 7 in [Z81]. *Ergänzend:* Sieh auch [N92] VII § 2, (2.9) Theorem und (2.10) Korollar.

8 Binäre quadratische Formen

In den folgenden Vorträgen, abschließend mit Vortrag 10, soll mit Hilfe der L-Reihen ein weiteres klassisches Ergebnis der analytischen Zahlentheorie bewiesen werden, nämlich die Klassenzahlformel für (binäre) quadratische Formen.

Als Vorbereitung hierzu sollen in diesem Vortrag als erstes *binäre quadratische Formen* mit ganzzahligen Koeffizienten eingeführt werden. Das Ziel ist es, diese näher zu klassifizieren; hierzu wird zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge der quadratischen Formen eingeführt. Die *Diskriminante* erweist sich dann als Invariante der jeweiligen Äquivalenzklasse. Umgekehrt gibt es nur endlich viele Äquivalenzklassen von quadratischen Formen zu gegebener Diskriminante $D \in \mathbb{Z}$. Deren Anzahl entspricht – leicht abgewandelt – der *Klassenzahl* h_D.

Wir skizzieren das weitere Vorgehen um h_D zu ermitteln und beweisen den ersten Schritt auf diesem Weg (Satz 2).
Literatur: Abschnitt 8 in [Z81], bis ausschließlich Satz 3.

9 Die Klassenzahl $*$

Wir führen das Programm des vorangegangen Vortrags weiter. Es zeigt sich, dass die Klassenzahl, bis auf eine gut handhabbare Konstante, durch den Wert der einer speziellen L-Reihe an der Stelle $s = 1$, $L(\chi_D, 1)$, gegeben ist. Hierbei ist χ_D der durch die Diskriminante D bestimmte Dirichlet-Charakter.
Literatur: Abschnitt 8 in [Z81], ab einschließlich Satz 3.

10 Die Berechnung von $L(1, \chi)$ $*$

Mit dem letzten Vortrag ist klar geworden, dass wir um h_D bestimmen, den Wert der von $L(\chi_D, s)$ an der Stelle $s = 1$ berechnen müssen. Hierzu werden wir zunächst als Hilfsmittel *Gaußsche Summen* einführen und diese studieren. Mit deren Hilfe können wir anschließend eine explizite Formel für den L-Wert $L(\chi_D, 1)$ (und damit letztlich für h_d) zeigen, die lediglich von D und Charakterwerten von χ_D abhängt.
Literatur: Abschnitt 9 in [Z81] jedenfalls bis einschließlich Satz 3, der Rest des Abschnitts soll in Rücksprache mit mir kurz zusammengefasst werden, er stellt einen Ausblick anhand von Beispielen dar. *Ergänzend:* [S73], VI §4 (etwas knapp).

11 Quadratische Formen und quadratische Körper *

Unter einem *quadratischen (Zahl)körper* K versteht man eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Grad zwei, d.h. $\mathbb{Q} \subset K$, $[K : \mathbb{Q}] = 2$. Man kann K in der Form $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, mit $d \in \mathbb{Z}$, d keine Quadratzahl schreiben.

Wer werden uns in diesem Vortrag mit quadratischen Zahlkörpern beschäftigen, und sehen, wie sie mit der Theorie binärer quadratischer Formen zusammenhängen. An die Stelle der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \in \mathbb{Q}$ tritt nun der *Ganzheitsring* $\mathcal{O}_K \subset K$ (auch Ring der ganzen Zahlen genannt). Die Diskriminante des Zahlkörpers ist die Fundamentaldiskriminante (Vortrag 8) einer quadratischen Form, die sich $\mathcal{O}_K$ zuordnen lässt.

Weiter gilt es einen geeigneten Ersatz für die Teilbarkeitslehre in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ zu finden. Dies wird über den Begriff der ganzen (bzw. gebrochenen) *Ideale* bewerkstelligt, die eine eindeutige Primidealzerlegung besitzen. Am Ende steht eine Äquivalenzbeziehung zwischen Äquivalenzklassen von Idealen und quadratischen Formen der Diskriminante D, aus der Endlichkeit der in Vortrag 9 definierten Klassenzahl folgt.
Literatur: [Z81] Abschnitt 10.

> **Anmerkung** Das Thema ist relativ umfangreich, eine sinnvolle Auswahl sollte getroffen werden.

12 Die Zetafunktion eines quadratischen Zahlkörpers*

Dem Quadratischen Zahlkörper K lässt sich eine Dirichlet Reihe zuordnen, die gewisserweise analog zur Riemannschen Zetafunktion definiert ist, die *Dedekindsche Zetafunktion*:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^s,$$

wobei die Summe über alle ganzen Ideale $0 \neq \mathfrak{a} \in \mathcal{O}_K$ von K läuft. Dabei $N(\mathfrak{a})$ die Norm des Ideals. Mit der eindeutigen Primidealzerlegung folgert man dann, ganz anlog zu $\zeta(s)$, eine Produktentwicklung über alle Primideale. Wir wollen uns mit Eigenschaften der Dedekindschen Zetafunktion beschäftigen und erhalten dann aus der Zerlegung

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) L(s, \chi_D)$$

eine explizite Formel für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als Norm eines Ideals von K.
Literatur: Abschnitt 11 [Z81].
Ergänzend: [N92] VII § 5, [S73] §3.4.

Literatur

[BF] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*. Springer-Lehrbuch

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer, 2007

[K21] H. Kasten. Vorlesung *Funktionentheorie 1 SS2021*. MaMpf.

[N92] J. Neukirch.*Algebraische Zahlentheorie*. Springer-Lehrbuch, 1992

[S73] J.-P. Serre. *A Course in Arithmetic*. Springer **GTM 7**, 1973.

[Z81] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.