

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG  
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Bachelorarbeit

# Das Jacobowitz-Hartman Theorem

Ein Beweis mithilfe des Poincaré-Birkhoff  
Fixpunktsatzes

Peter Martin  
4038623

Betreuer:  
Prof. Dr. Peter Albers

14. September 2021

# 1 Abstract

Das Jacobowitz-Hartman Theorem trifft eine Aussage über Lösungen gewisser, bezüglich der Variable der Zeit periodischer, gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Das Theorem besagt, dass derartige Differentialgleichungen unter weiteren Bedingungen beliebig viele, ebenfalls periodische Lösungen besitzen. Weiter noch lässt sich eine Schranke angeben, sodass zu allen ganzen geraden Zahlen oberhalb dieser Schranke eine periodische Lösung der Differentialgleichung existiert, welche exakt diese Anzahl an Nullstellen pro Periode besitzt. Das Theorem wird in der vorliegenden Arbeit bewiesen. Der vorgestellte Beweis verbindet Hamiltonische dynamische Systeme aus der Physik und ein topologisches Theorem um zu diesem Resultat zu kommen.

The Jacobowitz-Hartman Theorem makes a statement about solutions of certain periodic ordinary differential equations of second order, which are periodic in its variable of time. The theorem states, that such differential equations under some more assumptions have arbitrarily many likewise periodic solutions. Further, a bound can be declared, such that for each even integer above this bound there exists a solution of the differential equation with exactly this number of zeroes per period. The theorem is proven in the present paper. The presented proof connects hamiltonian dynamical systems originating in physics, and a topological theorem in order to achieve this result.

# Inhaltsverzeichnis

1	Abstract	1
2	Einleitung	3
3	Hinführung	5
4	Das Jacobowitz-Hartman Theorem	8
5	Lemmata und a priori Aussagen	9
6	Beweis des Jacobowitz-Hartman Theorems	30
7	Eine Folgerung des Jacobowitz-Hartman Theorems	38
8	Fazit und Ausblick	40
9	Literaturverzeichnis	41
10	Eigenständigkeitserklärung	42

## 2 Einleitung

Fixpunktsätze sind ein immer wiederkehrendes Thema bei dem Studium von Topologie und Analysis. Viele abstrakte Problemstellungen lassen sich durch geschicktes Umformulieren auf die Frage reduzieren, ob denn eine gewisse Abbildung einen Fixpunkt besitzt. Eines der berühmtesten Beispiele hierfür ist wohl der Fixpunktsatz von Stefan Banach (1892 - 1945, [1]). So lässt sich etwa der Satz der impliziten Funktion mit diesem beweisen. Auch bei der Suche nach eleganten Lösungen von vermeintlich unverwandten Problemstellungen begegnet man immer wieder Fixpunktsätzen. Ähnlich unerwartet lässt sich ein Theorem (Theorem 1) gewöhnlichen Differentialgleichungen von Howard Jacobowitz (*Daten unbekannt*) und Philip Hartman (1915 - 2015, [2]) mithilfe eines topologischen Fixpunktsatzes (Satz 1 und Satz 2) von Henri Poincaré (1854 - 1912, [3]) und George David Birkhoff (1884 - 1944, [4]) auf eine raffinierte Art beweisen. Der Fixpunktsatz besagt, dass ein maßerhaltender Homöomorphismus auf und in dem selben Kreisring, welcher den inneren und äußeren Kreis in entgegengesetzte Richtungen dreht, mindestens zwei Fixpunkte besitzt. Poincaré stieß 1912 bei seiner Forschung um das Dreikörperproblem auf diese Aussage und konnte sie für einige spezielle Fälle zeigen. Ein Jahr später bewies Birkhoff die Aussage für den allgemeinen Fall. Aus einer anderen Fachrichtung kommt das Jacobowitz-Hartman Theorem (Theorem 1): Es wird eine Aussage über gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung getroffen, welche in der Variable der Zeit periodisch sind und einige weitere Bedingungen erfüllen. Sie garantiert die Existenz von periodischen Lösungen, mit einer vorher angegebenen Anzahl von Nullstellen innerhalb einer Periode. Unter stärkeren Annahmen bewies Jacobowitz die Aussage im Jahr 1976. Ein Jahr später konnte Hartman das Theorem in einer allgemeineren Form beweisen. In dieser Form ist es auch in dieser Arbeit in Theorem 1 formuliert. Dabei wird gezeigt, dass die Abbildung  $\varphi^1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die einen Punkt  $(x_0, y_0)$  auf  $(x(1), x'(1))$  abbildet, der sogenannte Fluss, einen Fixpunkt besitzt, wobei  $x$  die (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung mit den Anfangswerten  $x(0) = x_0$  und  $x'(0) = y_0$  ist. Damit wäre die 1-Periodizität von  $x$  gegeben und die Anzahl der Nullstellen lässt sich dabei durch eine Transformation festlegen. Es braucht zwei wichti-

ge Schritte zur Anwendung des Fixpunktsatzes: Zunächst muss man eine gewisse a priori Aussage treffen, um sicherzustellen, dass die für uns interessanten Lösungen in einem Kreisring liegen. Weiter ist zu zeigen, dass die besagte Abbildung ein maßerhaltender Homöomorphismus auf diesem Kreisring ist. Die Betrachtung von Flüssen wurde stark durch Poincaré und Birkhoff geprägt und mündet im Formalismus der dynamischen Systeme. Dynamische Systeme sind mathematische Modelle, in der eine Abbildung (der sogenannte Fluss) den Zustand eines Systems (als Punkte einer Mannigfaltigkeit) in Abhängigkeit der Startwerte und der vergangenen Zeit angibt. Berühmte Beispiele dafür sind etwa das Pendel, die Lotka-Volterra Differentialgleichungen oder das Dreikörperproblem. Als eine besondere Form von dynamischen Systemen lassen sich Hamiltonische Systeme auffassen. Diese sind benannt nach William Rowan Hamilton (1805 - 1865, [5]), der klassische mechanische Prozesse mithilfe einer Funktion beschrieb, die die Gesamtenergie eines Systems angibt. Die besondere Eigenschaft Hamiltonischer Systeme ist, dass der Fluss des Systems maßerhaltend ist, was wir im Beweis des Theorems 1 ausnutzen. Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit einer Reihe von a priori Aussagen über mögliche Lösungen. A priori Aussagen zu treffen, stellt einen großen Teil des Studiums sowohl der gewöhnlichen, als auch der partiellen Differentialgleichungen dar, und ist in dieser Arbeit ebenfalls elementar, um unter anderem Wohldefiniertheit von  $\varphi^1$  oder die Eindeutigkeit der Lösungen sicherzustellen. Insgesamt kombinieren wir also eine topologische Aussage, ein physikalisches Konzept und fachtypische a priori Untersuchungen in einem einzigen Beweis. Die Beweisführung dieser Arbeit richtet sich nach jener Beweisführung Birkhoffs, wie sie in [6] zu finden ist.

### 3 Hinführung

In dieser Arbeit betrachten wir gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$x' + f(x, t) = 0.$$

Wobei wir  $f \in \mathcal{C}^r(I \times D, \mathbb{R}^n)$  für ein  $r \in \mathbb{N}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  voraussetzen. Weiter betrachten wir also nur differenzierbare Abbildungen  $f$ , welche somit lokal lipschitzstetig sind. Nun definieren wir dynamische Systeme, um später mit dem Fluss Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung zu treffen.

**Definition 1:** Ein dynamisches System ist ein Tupel  $(T, D, \varphi)$  welches folgende Eigenschaften erfüllt:

- $T$  ist ein Monoid, genannt Zeit,
- $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ , genannt Phasenraum,
- $\varphi : T \times D \rightarrow D$ , genannt der Fluss, mit
  - $\varphi^t(x) := \varphi(t, x)$
  - $\varphi^0(x) = x$
  - $\varphi^{t_1} \circ \varphi^{t_2} = \varphi^{t_1+t_2}$

für  $x \in D$  und  $t, t_1, t_2 \in T$ .

Wie es nicht unüblich ist, ist  $T = \mathbb{R}$  und  $D = \mathbb{R}^n$  in dieser Arbeit, auch wenn oft  $T$  nur eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist und nicht zwingendermaßen additiv abgeschlossen. Die Lösungen einer Differentialgleichung  $x' + f(t, x) = 0$  lassen sich ebenfalls als ein dynamisches System auffassen, wenn sie eindeutig und existent sind. Dies ist möglich, indem man  $\varphi(x_0, t) = x(t)$  setzt, wobei  $x$  die eindeutige Lösung der Differentialgleichung ist mit  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$  die vorher festgelegte Anfangsstelle ist. Ein bekanntes Resultat ist, dass  $\varphi^t$  für alle  $t \in T$  ein ( $\mathcal{C}^r$ -)Diffeomorphismus auf dem jeweiligen Definitionsbereich ist. Finden wir einen Fixpunkt von  $\varphi^t$ , so haben wir eine  $t$ -periodische Lösung der Differentialgleichung gefunden. Dafür nutzen wir einen Fixpunktsatz, den sogenannten Poincaré-Birkhoff Fixpunktsatz:

**Satz 1:** Für  $0 \leq a < b$  sei der Kreisring  $A := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq u^2 + v^2 \leq b\}$ . Sei nun  $\varphi$  ein Homöomorphismus auf  $A$  in Polarkoordinaten, der Form

$$\begin{aligned} \varphi : A &\rightarrow A, \\ (\theta, r) &\mapsto (f(\theta, r), g(\theta, r)). \end{aligned}$$

Erhält  $\varphi$  die Grenzen von  $A$ , also

$$g(\theta, a) = a, \quad g(\theta, b) = b,$$

für  $\theta \in \mathbb{R}$  und erfüllt die sogenannte *twist-condition*

$$(f(\theta, a) - \theta)(f(\theta, b) - \theta) < 0,$$

für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  und ist  $\varphi$  zusätzlich maßerhaltend, ist also

$$\int_U du \wedge dv = \int_{\varphi(U)} du \wedge dv,$$

für alle offenen  $U \subseteq A$ , besitzt  $\varphi$  mindestens zwei nicht äquivalente Fixpunkte.

Dabei sorgt die *twist-condition* dafür, dass der innere und äußere Kreis von  $A$  durch  $\varphi$  gegensätzlich gedreht werden. Tatsächlich benötigen wir eine andere Version des Satzes, da die Erhaltung des äußeren Rings in der Praxis oft schwer anzuwenden ist. Außerdem formulieren wir die Aussage direkt in Polarkoordinaten:

**Satz 2:** Sei  $0 \leq a < b < c$  und  $S := \{(\theta, R) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq R \leq b\}$ ,  $\hat{S} := \{(\theta, R) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq R < c\}$ . Ist

$$\varphi = (f, g) : S \rightarrow \hat{S}$$

ein maßerhaltender Homöomorphismus mit

$$g(\theta, a) = a,$$

für alle  $\theta \in \mathbb{R}$ , sowie

$$\begin{aligned} f(\theta, a) - \theta &> 0, & \text{für alle } \theta \in \mathbb{R}, \\ f(\theta, x) - \theta &< 0, & \text{für alle } (\theta, R) \in \hat{S} \setminus S, \end{aligned}$$

so besitzt  $\varphi$  mindestens zwei nichtäquivalente Fixpunkte in  $S$ .

Nichtäquivalenz bedeutet hier Ungleichheit der ersten Variablen mod  $2\pi$  oder Ungleichheit der zweiten Variablen der Fixpunkte. Dies soll uns jedoch nicht beschäftigen, da wir sowieso nur einen Fixpunkt benötigen werden. Um zu zeigen, dass der Fluss  $\varphi$  der Differentialgleichung maßerhaltend ist, nutzen wir ein Konzept, welches aus der Physik bekannt ist. Wir statuen das dynamische System unserer Lösungen mit einer Hamiltonischen Funktion aus.

**Definition 2:** Ein Hamiltonisches System ist ein  $2n$ -dimensionales dynamisches System mit einer Hamiltonischen Funktion

$$H : \mathbb{R}^{2n} \times T \rightarrow \mathbb{R},$$

welche für  $r = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$  mit  $q, p \in \mathbb{R}^n$  die Hamiltonischen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

erfüllt.

Der Fluss  $\varphi$  eines Hamiltonischen Systems hat nun nach [7] die besondere Eigenschaft maßerhaltend zu sein, welche wir benötigen um den Fixpunktsatz anzuwenden.

## 4 Das Jacobowitz-Hartman Theorem

Zunächst formulieren wir das Jacobowitz-Hartman Theorem, welches wir in dieser Arbeit beweisen werden.

**Theorem 1:** Sei  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$  mit folgenden Eigenschaften für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

- (i)  $f(t+1, x) = f(t, x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f(t, 0) = 0$ ,
- (iii)  $\frac{f(t, x)}{x} \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Dann besitzt die Differentialgleichung

$$x'' + f(t, x) = 0 \tag{1}$$

unendlich viele periodische Lösung der Periode 1. Genauer noch: Es existiert ein  $N_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > N_0$  eine periodische Lösung von (1) existiert mit Periode 1 mit genau  $2N$  Nullstellen in  $[0, 1)$ . Ist zusätzlich  $y$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y'' + \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)y = 0$  mit  $n_0$  Nullstellen in  $[0, 1)$ , so ist  $\lceil \frac{n_0}{2} + 1 \rceil$  eine mögliche Wahl von  $N_0$ .

Der Beweis dieses Theorems bildet den Inhalt dieser Arbeit.

## 5 Lemmata und a priori Aussagen

In diesem Abschnitt werden wir a priori Aussagen über die Lösungen von (1) treffen. Unser Ziel ist es, für uns interessante Lösungen durch einen Kreisring zu beschränken (Lemma 4). Als erstes definieren wir Klassen an Funktionen und zeigen, dass auch  $f$  aus Theorem 1 in einer dieser Klassen liegt. Über und mit dieser Klasse lassen sich später einfacher Aussagen über  $f$  und der Lösungen der Differentialgleichung treffen.

**Definition 3:** Es seien die Konstanten  $T, a, b, M, m > 0$  mit  $2a < b$  und  $M < b$ . Weiter sei  $g \in \mathcal{C}([a, \infty))$  eine positive Funktion mit  $\frac{g(s)}{s}$  monoton (wachsend) und  $\frac{g(s)}{s} \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ . Dann definiere  $\mathcal{F}_{T,a,b,M,m,g}$  als die Menge aller  $h \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R})$ , die lokal lipschitzstetig in der zweiten Komponente sind, mit

$$|h(t, x)| \leq M \quad \text{für } |x| \leq a, \quad (2)$$

$$\frac{1}{x}h(t, x) \geq 4 \quad \text{für } |x| \geq a, \quad (3)$$

$$|h(t, x)| \leq g(|x|) \quad \text{für } |x| \geq a, \quad (4)$$

$$\frac{1}{x}h(t, x) \geq m^2 \quad \text{für } |x| \geq b, \quad (5)$$

jeweils für alle  $t$  in  $[0, T]$ .

**Bemerkung 1:** Aus Gründen der Übersicht im Folgenden, definiere den Konstantenraum  $\mathcal{T} := \{(T, a, b, M, m) \in \mathbb{R}^5 \mid 0 < 2a < b, 0 < M < b, 0 < T\} \times \{g \in \mathcal{C}([a, \infty)) \mid g \text{ positiv, } \frac{g(s)}{s} \text{ monoton wachsend, } \frac{g(s)}{s} \rightarrow \infty \text{ für } s \rightarrow \infty\}$  und schreibe somit  $\mathcal{F}_\Gamma = \mathcal{F}_{T,a,b,M,m,g}$  für  $\Gamma = (T, a, b, M, m, g) \in \mathcal{T}$ .

Als nächstes muss noch gezeigt werden, dass  $f$  aus Theorem 1 tatsächlich in einer der Klassen liegt. Weiter fordern wir die Ungleichung  $mT > 2\pi n$  für ein gewisses  $n \in \mathbb{N}$ . Dabei sei gesagt, dass wir im Beweis des Theorems 1  $n = 2N + 1$  setzen, wobei mit  $2N$  die gewünschte Anzahl an Nullstellen der gesuchten Lösung in  $[0, 1)$  ist. Der Grund hinter der Ungleichung ist, dass wir später zeigen werden, dass die Zeit, die eine Lösung benötigt um  $2N$  Nullstellen zu durchqueren, beliebig nahe an  $\frac{2\pi n}{m}$  liegt und somit kleiner als  $T$  ist.

**Lemma 1:** Sei  $f$  wie in Theorem 1 und seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T > 0$  sowie  $\alpha > 0$  gegeben.

Dann existiert ein  $\Gamma = (T, a, b, M, m, g) \in \mathcal{T}$ , sodass  $f \in \mathcal{F}_\Gamma$  mit  $mT > 2\pi n\alpha$ .

**Beweis:** Wähle  $m > T^{-1}2\pi n\alpha$ . Damit ist  $mT > 2\pi n\alpha$  klar. Im Folgenden werden wir den Parametervektor  $\Gamma$  bestimmen, sodass mit diesem (2) - (5) für  $h = f$  erfüllt sind und somit  $f \in \mathcal{F}_\Gamma$  gilt. Dass  $f$  lokal lipschitzstetig bezüglich  $x$  ist, folgt aus der Differenzierbarkeit von  $f$ .

Da  $\frac{1}{x}f(t, x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \pm\infty$  nach Theorem 1(iii) können wir  $a > 0$  groß genug wählen, sodass  $\frac{1}{x}f(t, x) \geq 4$  für  $|x| \geq a$  gilt. Damit ist (3) für  $h = f$  erfüllt.

Setze nun  $M$  als das Maximum von  $|f|$  auf dem Kompaktum  $[0, T] \times [-a, a]$ , sodass auch (2) für  $h = f$  erfüllt ist.

Mit der gleichen Begründung wie für (3) wählen wir  $b > 0$  groß genug, sodass  $b > 2a$ ,  $b > M$  und  $\frac{1}{x}f(t, x) \geq m^2$  für  $|x| \geq b$  also (5) für  $h = f$  gilt.

Definiere nun  $g \in \mathcal{C}([a, \infty))$  mit

$$g(s) := s \cdot \left( 1 + \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq |x| \leq s}} \frac{1}{|x|} |f(t, x)| \right)$$

für  $s \geq a$ , wobei die max Funktion hier wohldefiniert ist, da  $\frac{1}{|x|} |f(t, x)|$  als Abbildung stetig und die Menge der Elemente für die  $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq |x| \leq s$  gilt, ein Kompaktum ist.

Dass  $g$  stetig ist, erweist sich tatsächlich als nicht trivial. Sei  $h(t, x) := \frac{1}{|x|} |f(t, x)|$  für  $t \in [0, T]$ ,  $|x| \in [a, \infty)$ . Offenbar reicht es zu zeigen, dass  $\max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq |x| \leq s}} h(t, x)$  als Funktion in  $s \in [a, \infty)$  stetig ist. Weiter ist  $h$  stetig und nichtnegativ. Da

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq |x| \leq s}} h(t, x) = \max \left( \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq x \leq s}} h(t, x), \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq -x \leq s}} h(t, x) \right)$$

und  $\max(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|)$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , also stetig ist, reicht es zu zeigen, dass  $\max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq x \leq s}} h(t, x)$  stetig ist. Die Stetigkeit von  $\max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq -x \leq s}} h(t, x)$  folgt analog. Zunächst reskalieren wir  $h$ :

$$\rho(u, v, s) := h(u \cdot T, v \cdot (s - a) + a)$$

für  $u, v \in [0, 1]$ .  $\rho$  ist also ebenfalls stetig und nichtnegativ.

Damit ist mit  $W := [0, 1]^2$

$$\max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq x \leq s}} h(t, x) = \max_{w \in W} \rho(w, s) =: m(s)$$

für  $s \geq a$  und es reicht die Stetigkeit von  $m$  zu zeigen. Sei nun  $s^* \in [a, \infty)$  und  $\varepsilon > 0$ . Definiere das kompakte Intervall  $I_{s^*} := [a, s^* + 1] \subseteq [a, \infty)$ . Damit ist  $\rho|_{W \times I_{s^*}}$  als stetige Funktion auf einem Kompaktum auch gleichmäßig stetig. Es gilt also

$$\begin{aligned} \exists \delta_0 \forall (w_0, s_0), (w_1, s_1) \in W \times I_{s^*} : \|(w_0, s_0) - (w_1, s_1)\|_\infty < \delta_0 \\ \Rightarrow |\rho(w_0, s_0) - \rho(w_1, s_1)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da für  $s \in I_{s^*}$  mit  $|s^* - s| < \delta_0$  bereits für  $w \in W$

$$\|(w, s^*) - (w, s)\|_\infty = |s^* - s| < \delta_0$$

gilt, folgt weiter

$$\forall w \in W : |\rho(w, s^*) - \rho(w, s)| < \varepsilon.$$

Also ist  $\rho(\cdot, s)$  strikt größer als  $\rho(\cdot, s^*) - \varepsilon$  und strikt kleiner als  $\rho(\cdot, s^*) + \varepsilon$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \sup_{w \in W} \rho(w, s) &\geq \sup_{w \in W} (\rho(w, s^*) - \varepsilon), \\ \sup_{w \in W} \rho(w, s) &\leq \sup_{w \in W} (\rho(w, s^*) + \varepsilon), \end{aligned}$$

und da  $W$  kompakt ist sogar

$$\begin{aligned} m(s) &= \max_{w \in W} \rho(w, s) > \max_{w \in W} (\rho(w, s^*) - \varepsilon) = m(s^*) - \varepsilon, \\ m(s) &= \max_{w \in W} \rho(w, s) < \max_{w \in W} (\rho(w, s^*) + \varepsilon) = m(s^*) + \varepsilon, \end{aligned}$$

also insgesamt  $|m(s^*) - m(s)| < \varepsilon$ . Wählen wir also  $\delta := \min(\delta_0, 1) > 0$ , dann gilt für  $s \in [a, \infty)$  mit  $|s^* - s| < \delta < 1$ , dass  $s \in I_{s^*}$  und damit mit obigem Beweis die Stetigkeit von  $m$ , also auch von  $g$  auf ganz  $[a, \infty)$ .

Weiter ist  $g$  offenbar positiv. Für  $a \leq s \leq s'$  ist

$$\begin{aligned} S &:= \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq T, a \leq |x| \leq s\} \\ &\subseteq \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq T, a \leq |x| \leq s'\} =: S' \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{g(s)}{s} = 1 + \max_{(t,x) \in S} \frac{1}{|x|} |f(t, x)| \leq 1 + \max_{(t,x) \in S'} \frac{1}{|x|} |f(t, x)| = \frac{g(s')}{s'},$$

also ist  $\frac{g(s)}{s}$  als Abbildung monoton wachsend. Weiter ist für  $s \geq a$

$$\begin{aligned} \frac{g(s)}{s} &= 1 + \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq |x| \leq s}} \frac{1}{|x|} |f(t, x)| \\ &\geq 1 + \max_{a \leq |x| \leq s} \frac{1}{|x|} |f(0, x)| \\ &\geq 1 + \frac{1}{s} |f(0, s)| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

nach Theorem 1(iii). Damit sind die Bedingungen an  $g$  nach Definition 3 erfüllt. Sei nun  $|x| \geq a$ , dann ist

$$\begin{aligned} g(|x|) &= |x| + \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq |y| \leq |x|}} \frac{|x|}{|y|} |f(t, y)| \\ &\geq \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ a \leq |y| \leq |x|}} |f(t, y)| \\ &\geq \max_{0 \leq t \leq T} |f(t, x)| \geq |f(t, x)| \end{aligned}$$

für alle  $0 \leq t \leq T$ . Somit ist auch (5) für  $h = f$  erfüllt und mit  $\Gamma = (T, a, b, M, m, g) \in \mathcal{T}$  das Lemma bewiesen.

Wir werden nun zeigen, dass wir Funktionen aus  $\mathcal{F}_\Gamma$  für  $\Gamma \in \mathcal{T}$  für große  $x$ -Werte stetig durch eine in  $x$  linear wachsende Funktion ersetzen können, sodass die resultierende Funktion wieder in  $\mathcal{F}_\Gamma$  liegt. Diese Transformation werden wir benötigen, um eine globale Lipschitz-Bedingung zu erhalten. Die Motivation hinter den Funktionsklassen wird nach diesem Lemma klar: Treffen wir Aussagen über  $\mathcal{F}_\Gamma$ , so gelten diese für mehrere Abbildungen, die für uns von Interesse sind.

**Lemma 2:** Falls  $h \in \mathcal{F}_\Gamma$  für ein  $\Gamma \in \mathcal{T}$  ist, setzen wir für ein beliebiges  $c > b$  für  $t, x \in \mathbb{R}$

$$h_0(t, x) = \begin{cases} h(t, x) & \text{für } |x| \leq c, \\ \frac{x}{c}h(t, c) & \text{für } x \geq c, \\ -\frac{x}{c}h(t, -c) & \text{für } x \leq -c. \end{cases}$$

also  $h_0 \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R})$ . Dann ist  $h_0 \in \mathcal{F}_\Gamma$ .

**Beweis:** Offenbar ist  $h_0$  stetig und wir müssen (2) - (5) für  $h_0$  für  $c > b$  zeigen. Dabei reicht es die Fälle für  $|x| \geq c$  zu betrachten, da  $h_0 = h$  für  $|x| \leq c$  und  $h \in \mathcal{F}$  gilt. Sei also im Folgenden dieses Beweises  $|x| \geq c > b$ .

Damit ergibt sich (2), da  $a < 2a < b < c < |x|$ .

Sei nun  $|x| \geq a$ , dann ist

$$x^{-1}h_0(t, x) = \begin{cases} c^{-1}h(t, c) \geq 4 & \text{für } x \geq c, \\ -c^{-1}h(t, -c) \geq 4 & \text{für } x \leq -c, \end{cases}$$

da  $h$  die Eigenschaft (3) erfüllt. Damit erfüllt  $h_0$  ebenfalls (3).

Weiter gilt (für  $|x| > a$ ):

$$|h_0(t, x)| = \begin{cases} \left| \frac{x}{c} \right| |h(t, c)| \leq \left| \frac{x}{c} \right| g(|c|) & \text{für } x \geq c, \\ \left| \frac{x}{c} \right| |h(t, -c)| \leq \left| \frac{x}{c} \right| g(|-c|) & \text{für } x \leq -c. \end{cases}$$

Also zusammen:

$$\begin{aligned} |h_0(t, x)| &\leq |x| \frac{g(c)}{c} \\ &\leq |x| \frac{g(|x|)}{|x|} = g(|x|), \end{aligned}$$

da  $s^{-1}g(s)$  als Abbildung monoton wachsend und  $|x| \geq c$  ist.

Betrachte nun  $|x| \geq b$ , dann gilt

$$x^{-1}h_0(t, x) = \begin{cases} c^{-1}h(t, c) \geq m^2 & \text{für } x \geq c, \\ -c^{-1}h(t, -c) \geq m^2 & \text{für } x \leq -c, \end{cases}$$

da  $h$  die Eigenschaft (5) für  $x = c$  bzw.  $x = -c$  erfüllt, da  $|\pm c| = c > b$  gilt. Also erfüllt auch  $h_0$  die Eigenschaft (5) und liegt damit in  $\mathcal{F}_\Gamma$ .

Das folgende Lemma 3 ist das aufwendigste dieser Arbeit und trifft eine a priori Aussage für Lösungen von (1) für  $h \in \mathcal{F}_\Gamma$ . Tatsächlich wird erst Lemma 4 die gewünschte Aussage zeigen, allerdings ist das Lemma 3 schon fast die Kontraposition von Lemma 4. Damit wird der letzte Beweis dieses Kapitels sehr einfach.

**Lemma 3:** Sei  $h \in \mathcal{F}_\Gamma$  für ein  $\Gamma = (T, a, b, M, m) \in \mathcal{T}$  und  $mT > 2\pi n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert ein  $\lambda_{n,\Gamma} > 0$ , welches nur von  $n$  und  $\mathcal{F}_\Gamma$  abhängig ist, sodass für  $\lambda \geq \lambda_{n,\Gamma}$  jede Lösung  $x$  von  $x'' + h(t, x) = 0$  mit der Anfangswertbedingung

$$(x(0))^2 + (x'(0))^2 \geq 2\lambda^2$$

auf ganz  $[0, T)$  existiert und dort mindestens  $n$  Nullstellen besitzt.

**Beweis:** Sei  $x$  eine Lösung von (1) für ein  $f \in \mathcal{F}_\Gamma$  mit  $\Gamma = (T, a, b, M, m, g) \in \mathcal{T}$  und  $mT > 2\pi n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , wobei wir  $f$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  fortsetzen, indem wir  $f(t, \cdot) = f(0, \cdot)$  für  $t < 0$  und  $f(t, \cdot) = f(T, \cdot)$  für  $t > T$  setzen. Tatsächlich werden wir diese Fortsetzung von  $f$  am Ende des Beweises nicht mehr benötigen, da sie nur absichert, dass an einer Stelle des Beweises  $x$  außerhalb von  $[0, T)$  wohldefiniert ist. Da  $f$  lokal lipschitzstetig ist, ist dies auch

$$F(t, u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -f_0(t, u_1) \end{pmatrix}$$

mit  $u \in \mathbb{R}^2$ . Setzen wir  $x = u_1$ , ist (1) äquivalent zu

$$u' = F(t, u)$$

und  $x$  existiert als Lösung von (1) lokal eindeutig. Es existiert  $x$  zunächst nur in dessen maximalen Existenzintervall  $(-\varepsilon, T^*) \ni 0$ , allerdings können wir, solange wir Beschränktheit von  $x$  garantieren können, mit beliebig großen  $T^*, \varepsilon > 0$  rechnen. Wir untersuchen die Zeit, die  $x$  in verschiedenen Regionen verbringt und zeigen folgende Aussagen für ein  $t_0 \in [0, T^*)$ :

(i) Von  $|x| < a$  zu  $x = a$ :

Existiert ein  $\lambda \geq \max(2M, 4a)$  und falls  $-a \leq x(t_0) < a$  und  $x'(t_0) \geq \lambda$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) = a, \quad x'(t_1) \geq \frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 \leq \frac{4a}{\lambda}$$

gilt.

(ii) Von  $x = a$  zu einem lokalen Maximum:

Existiert ein  $\lambda \geq \left(2 \int_a^{2b} g(s) ds\right)^{\frac{1}{2}}$  und falls  $x(t_0) \geq a$  und  $x'(t_0) \geq \lambda$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) \geq 2b, \quad x'(t_1) = 0 \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 < \frac{\pi}{m}$$

gilt.

(iii) Von einem lokalen Maximum zu  $x = a$ :

Existiert ein  $\lambda \geq 2b$  und falls  $x(t_0) \geq \lambda$  und  $x'(t_0) = 0$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) = a, \quad x'(t_1) \leq -\lambda \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m}$$

gilt.

(iv) Von großen Werten zu  $x = a$ :

Existiert ein  $\lambda \geq 2b$  und falls  $x(t_0) \geq \lambda$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) = a, \quad x'(t_1) \leq -\lambda \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 \leq \frac{2\pi}{m}$$

gilt.

Wir zeigen diese Aussagen:

**Zu (i):**

Da  $x'(t_0) \geq \lambda > 0$  existiert ein  $0 < \tau \leq 1 = \frac{2M}{2M} \leq \frac{\lambda}{2M}$ , sodass  $-a \leq c(t) \leq a$  für alle  $t$  in  $[t_0, t_0 + \tau]$  gilt. Weiter gilt  $x''(t) = -f(t, x(t)) \geq -M$  nach (2) und damit

für  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$

$$\begin{aligned}
 x'(t) &= x'(t_0) + x'(t) - x'(t_0) \\
 &= x'(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{x''(s)}_{\geq -M} ds \\
 &\geq x'(t_0) + t(-M) - t_0(-M) \\
 &= x'(t_0) - M(t - t_0) \\
 &\geq \lambda - M\tau \\
 &\geq \lambda - M \frac{\lambda}{2M} \\
 &= \frac{\lambda}{2}.
 \end{aligned}$$

Integrieren liefert

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+\tau} x'(t) dt &\geq \int_{t_0}^{t_0+\tau} \frac{\lambda}{2} dt \\
 \Rightarrow x(t_0 + \tau) - x(t_0) &\geq (t_0 + \tau) \frac{\lambda}{2} - t_0 \frac{\lambda}{2} \\
 \Rightarrow x(t_0 + \tau) &\geq \tau \frac{\lambda}{2} + x(t_0) \\
 &\geq \tau \frac{\lambda}{2} - a > -a.
 \end{aligned}$$

Also ist  $x$ , solange nicht der Punkt  $x = a$  erreicht wird, echt größer  $-a$  und der Bereich  $|x| < a$  wird nicht nach unten verlassen. Lassen wir nun  $\tau$  in  $x(t_0 + \tau) \geq \tau \frac{\lambda}{2} - a$  wachsen, wird die rechte Seite für  $\tau = \frac{4a}{\lambda}$  gleich  $a$ . Also muss ein  $t_1$  in  $[t_0, t_0 + \frac{4a}{\lambda}]$ , sodass  $x(t_1) = a$  gilt. Weiter folgt  $t_1 - t_0 \leq t_0 + \frac{4a}{\lambda} - t_0 = \frac{4a}{\lambda}$  und damit (i).

**Zu (ii):**

In dem Bereich  $x \geq a$  gilt  $-x'' = f \geq 4x$ , also  $x'' \leq -4x$ . Jetzt zeigen wir ähnlich einem Sturm Vergleich (siehe [8]), dass ein lokales Maximum in  $I := [t_0, \tau]$  mit  $\tau = t_0 + \frac{\pi}{4}$  existiert. Dafür nehmen wir  $x' > 0$  in  $I$  an und damit  $x \geq x(t_0) \geq a$  und  $x'' \geq -4x$  in  $I$ . Sei  $y(t) = \sin(2(t - t_0))$  in  $I$ , dann ist  $y$  eine Lösung von  $y'' + 4y = 0$ ,

da

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2 \cos(2(t - t_0)) \\ \Rightarrow y''(t) &= -4 \sin(2(t - t_0)) \\ &= -4y(t) \end{aligned}$$

gilt. Da  $2(t - t_0)$  für  $t$  aus  $I$  in  $[0, \frac{\pi}{2}]$  liegt, ist  $y$  in  $I$  nichtnegativ. Weiter ist  $y(t_0) = y'(\tau) = 0$ ,  $y(\tau) = 1$  und  $y'(0) = 2$ . Es folgt

$$\begin{aligned} x''y - xy'' &= x''y + 4xy \\ &= y \underbrace{(x'' + 4x)}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Aber Integrieren liefert

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\tau} x''y - xy'' dt &= x'y - xy'|_{t_0}^{\tau} \\ &= x'(\tau)y(\tau) - x(\tau)y'(\tau) - x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) \\ &= \underbrace{x'(\tau)}_{\geq 0} + 2 \underbrace{x(t_0)}_{\geq a > 0} > 0 \end{aligned}$$

und führt zu einem Widerspruch, wobei wir

$$\begin{aligned} (x'y - xy')' &= x''y + x'y' - x'y' - xy'' \\ &= x''y - xy'' \end{aligned}$$

benutzen. Also können wir garantieren, dass ein Maximum in  $[t_0, t_0 + \frac{\pi}{4}]$  auftritt und wählen  $t_1 > t_0$  minimal mit  $x'(t_1) = 0$ .

Zunächst zeigen wir  $x(t_1) \geq 2b$ . Dafür definieren wir die Hilfsfunktion

$$V(t) = \frac{1}{2}x'^2(t) + G(x(t)) \quad \text{mit} \quad G(x) = \int_a^x g(s) ds.$$

In  $I := [t_0, t_1]$  gilt  $x' \geq 0$ ,  $x \geq a$  und damit  $x'' = -|x''| = -|f| \geq g(|x|) = g(x)$  nach

(4). Damit folgt

$$\frac{dV}{dt} = x'(x'' + g(x)) \geq 0$$

und somit  $V(t_0) \leq V(t_1)$ , also

$$\int_a^{2b} g(s) ds \leq \frac{1}{2}\lambda^2 \leq \frac{1}{2}x'^2(t_0) \leq V(t_0) \leq V(t_1) = G(x(t_1)).$$

Als nächstes benötigen wir die Umkehrfunktion  $\psi = G^{-1}$  von  $G$  auf  $x \geq a$ . Da  $g$  nach Konstruktion eine positive Abbildung auf  $x \geq a$  ist, mit  $g(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , ist  $G$  eine streng monoton wachsende Abbildung, ist also mit  $G(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , ist also eine bijektive Abbildung  $G : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Damit existiert  $\psi$  auf ganz  $[0, \infty)$ , da  $G(a) = 0$  und ist ebenfalls streng monoton wachsend mit  $\psi(y) \rightarrow \infty$  für  $y \rightarrow \infty$ , da  $\psi$  eine surjektive Abbildung nach  $[a, \infty)$  sein muss. Auf  $G(x(t_1)) \geq \int_a^{2b} g(s) ds$  angewandt erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \psi(G(x(t_1))) \\ &\geq \psi\left(\int_a^{2b} g(s) ds\right) \\ &= \psi(G(2b)) = 2b. \end{aligned} \tag{6}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Voraussetzung  $x'(t_0) \geq \lambda$  nötig ist, um obige Aussage  $x(t_1) \geq 2b$  zu zeigen. Für den Rest von (ii) reicht  $x'(t_0) \geq 0$  und  $x(t_1) > 2b$  als Annahme. Dies benutzen wir später beim Beweis von (iv).

Wir schätzen nun  $t_1 - t_0$  ab. In  $[t_0, t_1]$  ist  $x \geq a$  und mit (3) also  $-x'' = f \geq 4x \geq 4a > 0$ , bzw.  $x'' < 0$ . Also ist  $x$  konkav in  $[t_0, t_1]$  und für  $0 \leq \theta \leq 1$  gilt

$$x(\theta t_0 + (1 - \theta)t_1) \geq \theta x(t_0) + (1 - \theta)x(t_1)$$

und mit  $\theta = \frac{1}{2}$  und  $\tau := \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$

$$x(\tau) \geq \frac{1}{2}(\underbrace{x(t_0)}_{\geq a} + \underbrace{x(t_1)}_{> 2b}) > b.$$

Angenommen  $t_1 - \tau \geq \frac{\pi}{2m}$ , dann gilt  $-x'' = f \geq m^2x$  bzw.  $x'' + m^2x \leq 0$  in

$I := [\tau, \tau + \frac{\pi}{2m}]$  mit  $x \geq x(\tau) > b$  nach (5). Sei  $y(t) = \sin(m(t - \tau))$  eine Lösung von  $y'' + m^2 y = 0$ , denn

$$\begin{aligned} y'(t) &= m \cos(m(t - \tau)), \\ y''(t) &= -m^2 \sin(m(t - \tau)) = -m^2 y(t). \end{aligned}$$

Weiter ist  $y(\tau) = y'(\tau + \frac{\pi}{2m}) = 0$ ,  $y(\tau + \frac{\pi}{2m}) = 1$  und  $y'(\tau) = m$ , sowie  $m(t - \tau) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  für  $t \in I$ , also  $y \geq 0$  in  $I$ . Wir betrachten

$$\begin{aligned} x''y - xy'' &= x''y + m^2xy \\ &= y \underbrace{(x'' + m^2x)}_{\leq 0} \leq 0 \end{aligned}$$

und integrieren

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau + \frac{\pi}{2m}} x''y - xy'' dt &= x'y - xy' \Big|_{\tau}^{\tau + \frac{\pi}{2m}} \\ &= x' \left( \tau + \frac{\pi}{2m} \right) y \left( \tau + \frac{\pi}{2m} \right) - x \left( \tau + \frac{\pi}{2m} \right) y' \left( \tau + \frac{\pi}{2m} \right) \\ &\quad - x'(\tau)y(\tau) + x(\tau)y'(\tau) \\ &= \underbrace{x' \left( \tau + \frac{\pi}{2m} \right)}_{\geq 0} + \underbrace{mx(\tau)}_{\geq b > 0} > 0. \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch liefert  $t_1 - \tau < \frac{\pi}{2m}$ , also

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= t_1 + t_1 - (t_1 - t_0) \\ &= 2t_1 - 2\tau < \frac{\pi}{m} \end{aligned}$$

und somit die Aussage.

**Zu (iii):**

Im Bereich  $x \geq a$  ist nach (3)  $x'' = -f \leq -4a \leq -4a$  und damit für  $t \geq t_0$  mit

$x \geq a$  in  $(t_0, t]$

$$\begin{aligned} x'(t_0) &= \int_{t_0}^t \underbrace{x''(s)}_{\leq -4a < 0} ds - \underbrace{x'(t_0)}_{=0} \\ &\leq (t - t_0)(-4a) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also besitzt  $x$ , solange  $x \geq a$  gilt, eine im Betrag wachsende, negative Steigung und muss den Punkt  $x = a$  in endlicher Zeit erreichen. Setze  $t_1 > t_0$  minimal mit  $x(t_1) = a$ .

Definiere die Hilfsfunktion

$$W(t) = x'^2 + 4(x^2 - a^2).$$

Da in  $[t_0, t_1]$  weiterhin  $x'' \leq -4x < 0$  und damit  $x' \leq x'(t_0) = 0$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= 2x'x'' + 8xx' \\ &= 2 \underbrace{x'}_{\leq 0} \underbrace{(x'' + 4x)}_{\leq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

in  $[t_0, t_1]$ . Damit ist in diesem Intervall  $W$  monoton wachsend und es folgt

$$\begin{aligned} x'^2(t_1) &= x'^2(t_1) + 4 \underbrace{(x^2(t_1) - a^2)}_{=0} \\ &= W(t_1) \\ &\leq W(t_0) \\ &= \underbrace{x'^2(t_0)}_{=0} + 4(x^2(t_0) - a^2) \\ &= 4x^2(t_0) - \underbrace{(2a)^2}_{\leq 2b \leq x(t_0)} \\ &\geq 3x^2(t_0) \geq 3\lambda^2 > \lambda^2 \end{aligned}$$

und damit  $-x'(t_1) = |x'(t_1)| \geq \lambda$ , also  $x'(t_1) \leq -\lambda$ .

Um  $t_1 - t_0$  abzuschätzen, benutzen wir den gleichen Trick wie in (ii) und setzen  $\tau := \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$ . Dann gilt aufgrund der Konvexität von  $x$  in  $[t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} x(\tau) &= x\left(\frac{1}{2}t_0 + \left(1 - \frac{1}{2}t_1\right)\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\underbrace{(x(t_0) + x(t_1))}_{\geq 2b} > b. \end{aligned}$$

In  $[t_0, \tau]$  mit  $x \leq x(t_0) = 0$  gilt also  $x \geq x(\tau) \geq b$ , und somit  $-x'' = f \geq m^2x$  mit (5) bzw.  $x'' + m^2x \leq 0$  in  $[t_0, \tau]$ . Nun können wir erneut einen Vergleich wie oben durchführen, um  $t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m}$  zu zeigen. Dafür nehmen wir  $\tau - t_0 \geq \frac{\pi}{2m}$  an. Dann ist  $I := [t_0, t_0 + \frac{\pi}{2m}] \subseteq [t_0, \tau]$  und damit bleiben die letzten Aussagen in  $[t_0, \tau]$  für  $I$  erhalten. Wir setzen  $y(t) = \cos(m(t - t_0))$  und erhalten analog zu (ii)

$$\begin{aligned} y'(t) &= -m \sin(m(t - t_0)), \\ y''(t) &= -m^2 \cos(m(t - t_0)) = -m^2 y(t). \end{aligned}$$

Weiter ist  $y(t_0 + \frac{\pi}{2m}) = y'(t_0) = 0$ ,  $y(t_0) = 1$  und  $y'(t_0 + \frac{\pi}{2m}) = -m$ , sowie  $m(t - t_0) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  für  $t \in I$ , also  $y \geq 0$  in  $I$ . Es ist

$$x'' - xy'' = \underbrace{y}_{\geq 0} \underbrace{(x'' + m^2x)}_{\leq 0} \leq 0,$$

aber

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{\pi}{2m}} x''y - xy'' dt &= x'y - xy'|_{t_0}^{t_0 + \frac{\pi}{2m}} \\ &= x'\left(t_0 + \frac{\pi}{2m}\right) y\left(t_0 + \frac{\pi}{2m}\right) - x\left(t_0 + \frac{\pi}{2m}\right) y'\left(t_0 + \frac{\pi}{2m}\right) \\ &\quad - x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) \\ &= m \underbrace{x\left(t_0 + \frac{\pi}{2m}\right)}_{\geq b > 0} - \underbrace{x'(t_0)}_{=0} > 0 \end{aligned}$$

und damit der Widerspruch. Also gilt  $\tau - t_0 < \frac{\pi}{2m}$ , also

$$t_1 - t_0 = (t_0 + t_1) - 2t_0 = 2(\tau - t_0) < \frac{\pi}{m}.$$

**Zu (iv):**

Falls  $x'(t_0) = 0$  nutzen wir (iii) und sind fertig mit  $t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m} \leq \frac{2\pi}{m}$ .

Falls  $x'(t_0) > 0$  folgen wir dem Beweis von (ii), um ein  $t'_1 > t_0$  zu ermitteln ohne die Aussage  $x(t'_1) \geq 2b$  zu zeigen, da dafür  $x'(t_0) \geq \lambda$  benötigt wird. Wir zeigen  $x(t'_1) \geq 2b$  per Hand: Da  $x' > 0$  in  $[t_0, t'_1)$  nach (ii) gilt, folgt  $x(t'_1) > x(t_0) \geq \lambda \geq 2b$ . Jetzt können wir (ii) nutzen und es ist  $x(t'_1) > 2b$ ,  $x'(t'_1) = 0$  und  $t'_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m}$ . Jetzt können wir (iii) an der Stelle  $t'_1$  anwenden und es existiert ein  $t_1 > t'_1$ , sodass  $x(t_1) = a$ ,  $x'(t_1) \leq -\lambda$  und  $t_1 - t'_1 \leq \frac{\pi}{m}$  und damit  $t_1 - t_0 = t_1 - t'_1 + t'_1 - t_0 \leq \frac{2\pi}{m}$ , also die Aussage.

Falls  $x'(t_0) < 0$  betrachte  $t < t_0$  mit  $x' \leq 0$  in  $[t, t_0]$ . Dann gilt  $x \geq x(t_0) \geq \lambda > a$  und damit nach (3) auch  $-x'' = f \geq 4x > 4a$  bzw.  $x'' < -4a < 0$  in diesem Intervall. Damit wird der Punkt  $x' = 0$  beim Rückwärtslaufen in endlicher Zeit erreicht. Präziser gilt für  $\tau > 0$  mit  $x' \leq 0$  in  $[t_0 - \tau, t_0]$ :

$$\begin{aligned} x'(t_0 - \tau) &= - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} x'' dt + x'(t_0) \\ &> - \int_{t_0 - \tau}^{t_0} -4adt + x'(t_0) \\ &= t_0 4a - (t_0 - \tau)4a + x'(t_0) \\ &= \tau 4a + x'(t_0). \end{aligned}$$

Dabei wird die rechte Seite für große  $\tau$  positiv. Setze  $t'_0 < t_0$  maximal mit  $x'(t'_0) = 0$ . Nun können wir (iii) an der Stelle  $t'_0$  anwenden, da  $x' \leq 0$  in  $[t'_0, t_0]$ , also  $x(t'_0) \geq x(t_0) \geq \lambda$  gilt. Es existiert also ein minimales  $t_1 > t'_0$  mit  $x(t_1) = a$ ,  $x'(t_1) \leq -\lambda$  und  $t_1 - t'_0 \leq \frac{\pi}{m}$ . Da  $x \geq \lambda > a$  in  $[t'_0, t_0]$  gilt, folgt  $t_1 > t_0$  und damit  $t_1 - t_0 \leq t_1 - t'_0 \leq \frac{\pi}{m} \leq \frac{2\pi}{m}$ .

Analog kann man folgende Aussagen zeigen:

(i\*) Existiert ein  $\lambda \geq \max(2M, 4a)$  und falls  $-a < x(t_0) \leq a$  und  $x'(t_0) \leq -\lambda$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) = -a, \quad x'(t_1) \leq -\frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 \leq \frac{4a}{\lambda}$$

gilt.

(ii\*) Existiert ein  $\lambda \geq \left(2 \int_a^{2b} g(s) ds\right)^{\frac{1}{2}}$  und falls  $x(t_0) \leq -a$  und  $x'(t_0) \leq -\lambda$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) \leq -2b, \quad x'(t_1) = 0 \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 < \frac{\pi}{m}$$

gilt.

(iii\*) Existiert ein  $\lambda \geq 2b$  und falls  $x(t_0) \leq -\lambda$  und  $x'(t_0) = 0$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) = -a, \quad x'(t_1) \geq \lambda \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 \leq \frac{\pi}{m}$$

gilt.

(iv\*) Existiert ein  $\lambda \geq 2b$  und falls  $x(t_0) \leq -\lambda$  gilt, dann existiert ein  $t_1 > t_0$ , sodass

$$x(t_1) = -a, \quad x'(t_1) \geq \lambda \quad \text{und} \quad t_1 - t_0 \leq \frac{2\pi}{m}$$

gilt.

Wir fassen (i)-(iv) und (i\*)-(iv\*) in folgender Aussage zusammen:

(v) Von einer Anfangswertbedingung über eine Nullstelle zu einer neuen Bedingung:  
Es existiert eine streng monoton wachsende Funktion  $\rho$  auf  $[0, \infty)$  mit  $\rho(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ , sowie zwei Konstanten  $\lambda_0, c > 0$ , sodass für alle  $\lambda > \lambda_0$  für  $x$  Lösung von (1) für ein  $f \in \mathcal{F}_\Gamma$  mit

$$x(t_0)^2 + x'(t_0)^2 \geq 2\lambda^2$$

für ein  $t_0 \in [0, T)$  existiert ein  $t_1 > t_0$  mit

$$x'(t_1) \geq 2\rho(\lambda)^2$$

und einer Nullstelle in  $(t_0, t_1)$  mit

$$t_1 - t_0 \leq \frac{2\pi}{m} + c \frac{a}{\rho(\lambda)}.$$

Diese Aussage zeigen wir jetzt. Für  $s \geq 0$  sei

$$\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{8}} \min \left( s, \psi \left( \frac{s^2}{8} \right) \right).$$

Da, wie vorhin gezeigt,  $\psi(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$  gilt und  $\psi$  streng monoton wachsend ist und diese Aussagen für  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  sowieso gelten, ist auch  $\rho$  streng monoton wachsend mit  $\rho(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ . Wähle nun  $\lambda_0$  groß genug mit  $\rho(\lambda_0) \geq 2b$  und  $c = \sqrt{8}$ . Dann ist

$$\psi \left( \frac{\lambda_0^2}{8} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{8}} \psi \left( \frac{\lambda_0^2}{8} \right) \geq \rho(\lambda_0) \geq 2b.$$

Wir wenden  $G$  auf  $\psi \left( \frac{\lambda_0^2}{8} \right) \geq 2b$  an:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_0^2}{8} &\geq G(2b) \\ \lambda_0 &\geq \sqrt{8G(2b)} \geq \sqrt{2G(2b)}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\lambda_0 \geq \frac{1}{\sqrt{8}} \lambda_0 \geq \rho(\lambda_0) \geq 2b$$

und mit  $b > M$  und  $b > 2a$  folgt für  $\lambda \geq \lambda_0$

$$\lambda \geq \max \left( 2M, \sqrt{8G(2b)}, 2b, 4a \right). \quad (7)$$

Für ein  $\lambda \geq \lambda_0$  sei nun

$$x(t_0)^2 + x'(t_0)^2 \geq 2\lambda^2,$$

es gilt also  $|x(t_0)| \geq \lambda$  oder  $|x'(t_0)| \geq \lambda$ .

Falls  $x(t_0) \geq \lambda$  gilt, wenden wir (iv) an und es existiert ein  $t_1 > t_0$  mit  $x(t_1) = a$ ,  $x'(t_1) \leq -\lambda$  und  $t_1 - t_0 \leq \frac{2\pi}{m}$ . Mit (i\*) erhalten wir ein  $t_2 > t_1$  mit  $x(t_2) = -a$ ,

$x'(t_2) \leq \frac{\lambda}{2}$  und  $t_2 - t_1 < \frac{4a}{\lambda}$ , also mit dem Mittelwertsatz eine Nullstelle in  $(t_1, t_2)$  und zusammen

$$\begin{aligned} t_2 - t_0 &\leq \frac{2\pi}{m} + \frac{4a}{\lambda} \\ &= \frac{2\pi}{m} + \frac{4}{\sqrt{8}} \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{8}}\lambda} \\ &\leq \frac{2\pi}{m} + \sqrt{2} \frac{a}{\rho(\lambda)} \\ &\leq \frac{2\pi}{m} + c \frac{a}{\rho(\lambda)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x'(t_2)^2 &\geq \frac{\lambda^2}{4} \\ &= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{8}}\lambda \right)^2 \\ &\geq 2\rho(\lambda)^2. \end{aligned}$$

Analog zeigt man mit (iv\*) und (i) die Aussage für  $x'(t_0) \leq \lambda$ .

Falls  $x'(t_0) \geq \lambda$  und  $|x(t_0)| \leq a$  wenden wir (i) an und es existiert ein  $t_1 > t_0$  mit  $x(t_1) = a$ ,  $x'(t_1) \geq \frac{\lambda}{2}$  und  $t_1 - t_0 \leq \frac{4a}{\lambda}$ . Für  $x(t_0) = a$  wähle  $t_1 = t_0$ . Mit  $\lambda' = \frac{\lambda}{2}$  gilt nach (7)

$$\lambda' \geq \frac{\sqrt{8G(2b)}}{2} = \sqrt{2G(2b)}$$

und wir können (ii) mit  $\lambda'$  anwenden und erhalten ein  $t_2 > t_1$  mit  $x(t_1) \geq \psi\left(\frac{1}{2}\lambda'^2\right) \geq 2b$  nach (6),  $x'(t_2) = 0$  und  $t_2 - t_1 < \frac{\pi}{m}$ . Wir setzen  $\lambda'' := \psi\left(\frac{1}{2}\lambda'^2\right) \geq 2b$  und wenden (iii) mit  $\lambda''$  an. Wir erhalten ein  $t_3 > t_2$  mit  $x(t_3) = a$ ,  $x'(t_3) \leq -\lambda''$  und  $t_3 - t_2 \leq \frac{\pi}{m}$ . Da  $\lambda'' \geq 2b \geq \max(2M, 4a)$ , können wir nun (i\*) nutzen und es existiert

ein  $t_4 - t_3 \leq \frac{4a}{\lambda''}$ , also mit dem Mittelwertsatz eine Nullstelle in  $(t_3, t_4)$ . Weiter ist

$$\begin{aligned}\lambda'' &= \psi\left(\frac{1}{2}\lambda'^2\right) \\ &= \psi\left(\frac{\lambda^2}{8}\right) \\ &= \sqrt{8}\frac{1}{\sqrt{8}}\psi\left(\frac{\lambda^2}{8}\right) \\ &\geq \sqrt{8}\rho(\lambda)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}|x'(t_4)| &\leq \frac{1}{2}\lambda'' \\ &\geq \sqrt{2}\rho(\lambda) \\ \Rightarrow x'(t_4)^2 &\geq 2\rho(\lambda)^2,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}t_4 - t_0 &\leq \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{m} + \frac{4a}{\lambda} + \frac{4a}{\lambda''} \\ &\leq \frac{2\pi}{m} + \frac{4a}{\sqrt{8}\rho(\lambda)} + \frac{4a}{\sqrt{8}\rho(\lambda)} \\ &= \frac{2\pi}{m} + \sqrt{8}\frac{a}{\rho(\lambda)} \\ &= \frac{2\pi}{m} + c\frac{a}{\rho(\lambda)}.\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Aussage für  $x'(t_0) \leq -\lambda$  und  $|x(t_0)| \geq a$  mit (i\*), (ii\*), (iii\*) und (i).

Der Fall  $|x'(t_0)| \geq \lambda$  und  $|x(t_0)| \geq a$  lässt sich auf den oben betrachteten Fall reduzieren, da insbesondere  $|x'(t_0)| \geq \frac{\lambda}{2} = \lambda'$  gilt und man analog (ii), (iii) und (i\*) bzw. (ii\*), (iii\*) und (i) benutzt, um die Aussage zu zeigen.

Wir können nun  $n$ -mal (v) anwenden, um das Lemma 3 zu zeigen. Wir setzen  $\rho^0(s) = s$  und  $\rho^{i+1}(s) = \rho(\rho^i(s))$  für  $s \geq 0$  und  $i \in \mathbb{N}_0$ . Da  $\rho$  streng monoton wachsend ist mit  $\rho(s) \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ , folgt dies induktiv auch für  $\rho^i$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ . Erfülle nun  $x$  die Anfangswertbedingung für ein  $\lambda \geq \lambda_0$ . Wir beginnen an der Stelle  $t_0 = 0$ , wenden

(v) an und erhalten ein  $t_1 > t_0$  mit einer Nullstelle in  $(t_0, t_1)$  und  $x'^2(t_1) \geq 2\rho(\lambda)^2$ .

Damit gilt

$$x(t_1)^2 + x'(t_1)^2 \geq 2\rho(\lambda)^2 = 2\rho^1(\lambda)^2.$$

So können wir (v) an der Stelle  $t_1$  anwenden, wobei wir  $\lambda$  durch  $\rho^1(\lambda)$  ersetzen. Dabei sei  $\lambda$  groß genug, sodass auch  $\rho^1(\lambda) \geq \lambda_0$  gilt. Für  $i < n$  wenden wir also induktiv an der Stelle  $t_i$  (v) mit  $\rho^i(\lambda) \geq \lambda_0$  an und erhalten ein  $t_{i+1} > t_i$  mit einer Nullstelle von  $x$  in  $(t_i, t_{i+1})$  und

$$x(t_{i+1})^2 + x'(t_{i+1})^2 \geq 2\rho^{i+1}(\lambda)^2,$$

sowie  $t_{i+1} - t_i \leq \frac{2\pi}{m} + c \frac{a}{\rho^{i+1}(\lambda)}$ . Für mindestens  $n$  Nullstellen benötigt  $x$  also eine Zeit von

$$\begin{aligned} t_n - t_0 &= \sum_{i=1}^n t_i - t_{i-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{2\pi}{m} + c \frac{a}{\rho^i(\lambda)} \right) \\ &= \frac{2\pi n}{m} + ca \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho^i(\lambda)}}_{\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0} \\ &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2\pi n}{m} < T. \end{aligned}$$

Wählen wir also  $\lambda_{n,\Gamma}$  groß genug, sodass  $t_n - t_0 < T$  für  $\lambda \geq \lambda_{n,\Gamma}$  gilt und fordern  $x(0)^2 + x'(0)^2 \leq 2\lambda^2$ , so besitzt  $x$ , wenn es eine Lösung von (1) für ein  $f \in \mathcal{F}_\Gamma$  ist, mindestens  $n$  Nullstellen in  $[0, T)$ . Weiter haben wir gezeigt, dass  $x$  auf ganz  $[0, T)$  existiert, da  $x$  in  $[0, t_n]$  beschränkt ist und für große  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $t_m > T$  und wir bei einem maximalen Existenzintervall  $[0, T^*) \subseteq [0, T)$ , welches ungleich  $[0, T)$  ist, Unbeschränktheit am Rand des Intervalls erwarten.

Das Kapitel wird durch das nächste Lemma 4 abgeschlossen, welches die a priori Untersuchungen vollendet. Es folgt fast direkt aus vorherigem Lemma 3 mithilfe eines bekannten Tricks.

**Lemma 4:** Sei  $h \in \mathcal{F}_\Gamma$  und  $n \in \mathbb{N}$  für ein  $\Gamma = (2T, a, b, M, m) \in \mathcal{T}$  mit  $mT > 2\pi n$ . Ist nun  $x$  eine Lösung von  $x'' + h(t, x) = 0$  welche auf ganz  $[0, 2T]$  definiert ist und dort höchstens  $n - 1$  Nullstellen annimmt, dann gilt bereits

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 < 2\lambda_{n, \Gamma_0}^2 \text{ für } t \in [0, 2T]$$

für  $\Gamma_0 = (T, a, b, M, m) \in \mathcal{T}$ .

Der Beweis bedient sich einer eleganten Art Aussagen über Intervalle zu treffen, welche ich hervorheben möchte: Gilt Aussage A für einen Punkt  $t_0 \in \mathbb{R}$ , wenn Aussage B für das Intervall  $(t_0 - T, t_0]$  oder  $[t_0, t_0 + T)$  gilt (in diesem Fall entspricht dies der Kontraposition von Lemma 3), so folgt Aussage A für alle Punkte eines Intervalls, falls dieses die Länge  $2T$  hat und B in jedem Teilintervall gilt (entspricht hier der Aussage, dass  $x$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen besitzt).

**Beweis:** Sei also  $x$  eine Lösung von  $x'' + h(t, x) = 0$  mit  $(x(t_0))^2 + (x'(t_0))^2 \geq 2\lambda_{n, \Gamma_0}^2$  für ein  $t_0 \in [0, 2T]$ .

Wir betrachten zunächst  $t_0 \in [0, T]$ . Sei  $h_1(t, x) := h(t_0 + t, x)$  für  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ . Da die Aussagen (2) bis (5) für  $h$  uniform in  $t$  gelten, gelten diese insbesondere auch für  $h_1$  mit  $t \in [0, T]$ . Damit ist  $h_1 \in \mathcal{F}_{\Gamma_0}$ . Sei weiter  $x_1(t) := x(t_0 + t)$  für  $t \in [0, T]$ . Dann ist

$$x_1''(t) + h_1(t, x_1(t)) = x''(t_0 + t) + h(t_0 + t, x(t_0 + t)) = 0$$

für alle  $t \in [0, T]$ , da  $x$  eine Lösung von  $x''(t) + h(t, x) = 0$  ist. Damit ist  $x_1$  eine Lösung von  $x_1''(t) + h_1(t, x_1) = 0$  mit

$$(x_1(0))^2 + (x_1'(0))^2 = (x(t_0))^2 + (x'(t_0))^2 \geq 2\lambda_{n, \Gamma_0}^2$$

und besitzt somit nach Lemma 3 mindestens  $n$  Nullstellen in  $[0, T]$ . Dies ist ein Widerspruch zur Annahme  $x$  besitzt höchstens  $n - 1$  Nullstellen in  $[0, 2T] \supseteq [t_0, t_0 + T]$ . Analog führen wir den zweiten Fall  $t_0 \in [T, 2T]$  zum Widerspruch. Sei dafür  $h_2(t, x) := h(t_0 - t, x)$  für  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$  und  $x_2(t) := x(t_0 - t)$ . Dann ist  $h_2 \in \mathcal{F}_{\Gamma_1}$  und

$x_2''(t) = \frac{d}{dt}(-x'(t_0 - t)) = x''(t_0 - t)$  und damit wieder

$$x_2''(t) + h_2(t, x_1(t)) = x''(t_0 - t) + h(t_0 - t, x(t_0 - t)) = 0$$

für alle  $t \in [0, T]$ , was analog zum obigen Fall zu einem Widerspruch führt.

**Bemerkung 2:** In diesem Kapitel haben wir gezeigt, dass eine Menge  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Gamma$  mit  $\Gamma = (2T, a, b, M, m, g) \in \mathcal{T}$  von lokal lipschitzstetigen Abbildungen  $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$  existiert, die für ein gegebenes  $2T > 0, n \in \mathbb{N}$  folgende Eigenschaften erfüllt:

- (i) (Lemma 1)  $\mathcal{F}$  enthält  $f$  aus Theorem 1.
- (ii) (Lemma 2) Falls  $h \in \mathcal{F}$ , dann ist ebenfalls  $h_0 \in \mathcal{F}$ , wobei

$$h_0 \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}) \text{ mit } h_0(t, x) = \begin{cases} h(t, x) & \text{für } |x| \leq c, \\ \frac{x}{c}h(t, c) & \text{für } x \geq c, \\ -\frac{x}{c}h(t, -c) & \text{für } x \leq -c \end{cases}$$

für ein beliebiges  $c > b$ .

- (iii) (Lemma 4) Für  $h \in \mathcal{F}$  und  $n \in \mathbb{N}$  existiert ein  $\lambda_{n, \Gamma_0} > 0$ , sodass jede Lösung  $x$  der Differentialgleichung

$$x'' + h(t, x) = 0$$

mit höchstens  $n \in \mathbb{N}$  Nullstellen folgende Ungleichung (eine “a priori” Abschätzung) erfüllt:

$$(x(t))^2 + (x'(t))^2 \geq 2\lambda_{n, \Gamma_0}^2 \text{ für alle } t \in [0, 2T]$$

mit  $\Gamma_0 = (T, a, b, M, m, g)$ .

## 6 Beweis des Jacobowitz-Hartman Theorems

Für ein gegebenes  $N \in \mathbb{N}$  seien  $2T = 1$  und  $n = 2N + 1$ . Wir suchen nach periodischen Lösungen der Periode 1 mit  $2N$  Nullstellen in  $[0, 1)$ . Nach Bemerkung 2 existiert ein  $\Gamma = (2T, a, b, M, m, g) \in \mathcal{T}$  mit den gewünschten Eigenschaften an  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_\Gamma$ . Da wir an Lösungen von (1) mit  $2N = n - 1$  Nullstellen in  $[0, 1)$  interessiert sind, können wir die a priori Abschätzung aus Lemma 4 benutzen. Nach Lemma 2 können wir  $f$  in (1) durch  $f_0$  mit  $c = 2\sqrt{\lambda}$  und  $\lambda = \max(\lambda_{n, \Gamma_0}, \frac{1}{4}b^2)$  mit  $\Gamma_0 = (T, a, b, M, m, g)$  ersetzen. Da  $|x| < \sqrt{2}\lambda_{n, \Gamma_0} \leq c$  nach Lemma 4 gilt und  $f = f_0$  auf diesem Bereich gilt, erhalten wir die gleichen Lösungen mit höchstens  $2N$  Nullstellen in  $[0, 1)$ .

Wir können die globale Existenz der Lösungen nun mit Picard-Lindelöf zeigen. Mit der Substitution  $u_1 := x$  ist unsere modifizierte Differentialgleichung äquivalent zu

$$\left. \begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = -f_0(t, u_1) \end{array} \right\} \Leftrightarrow u' = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -f_0(t, u_1) \end{pmatrix} =: F(t, u).$$

$F$  ist stetig und für  $|u_1| < c$  ist

$$\frac{\partial F}{\partial u}(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\partial f}{\partial u_1}(t, u_1) & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial u}(t, u) \right\|_\infty \leq 1 + \max_{\substack{t \in [0, 1] \\ u_1 \in [-c, c]}} \left| \frac{\partial f}{\partial u_1}(t, u_1) \right| < \infty$$

also ist  $F$  beschränkt, und damit lipschitzstetig bezüglich  $u$  für  $|u_1| < c$ . Für  $u_1 > c$  ist

$$F(t, u) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \cdot \frac{1}{c}h(t, c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{c}h(t, c) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

also linear bezüglich  $u$ . Analoges folgt für  $u_1 < -c$ . Damit erfüllt  $F$  die globale Lipschitz-Bedingung und mit Picard-Lindelöf folgt die eindeutige und globale Existenz von Lösungen unserer modifizierten Differentialgleichung, was den folgenden Schritt valide macht.

Wir definieren für  $t \in \mathbb{R}$  die Abbildung

$$\varphi^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix},$$

also den Fluss mit  $t = 1$ , wobei ein Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  auf  $(x(t), x'(t)) \in \mathbb{R}^2$  abgebildet wird. Dabei sei  $x$  die eindeutige Lösung der modifizierten Differentialgleichung mit den Anfangswerten  $x(0) = x_0$  und  $x'(0) = y_0$ . Wegen  $F(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  ist auch  $\varphi^t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Mit  $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = \varphi^0 = id_{\mathbb{R}^2}$  besitzt  $\varphi^t$  ein ebenfalls in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  liegendes Inverse. Also ist  $\varphi^t$  ein Diffeomorphismus und insbesondere ein Homöomorphismus.

Als nächstes zeigen wir, dass das durch den Fluss definierte dynamische System ein Hamiltonisches System ist, indem wir eine Hamiltonische Funktion definieren:

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$((x, y), t) \mapsto \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x f(t, u) du.$$

Mit  $y = x'$  und (1) folgt

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y = x' = \frac{\partial x}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -f(t, x) = x'' = y' = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Es liegt also ein Hamiltonisches System vor, für das gilt, dass der zugehörige Fluss  $\varphi^t$  nach [7] maßerhaltend ist. Uns interessiert tatsächlich nur  $\varphi^1$ , weshalb wir im Folgenden  $\varphi$  statt  $\varphi^1$  schreiben. Für eine angenehmere Darstellung betrachten wir die Differentialgleichung in Polarkoordinaten. Dafür setzen wir

$$x = r \sin(\theta),$$

$$x' = r \cos(\theta)$$

und substituieren  $R := \frac{1}{2}r^2$ . Dabei ist  $\theta$  nur  $\bmod 2\pi\mathbb{Z}$  eindeutig, was uns aber nicht stört. Wir erhalten

$$x = \sqrt{2R} \sin(\theta), \quad (8)$$

$$x' = \sqrt{2R} \cos(\theta) \quad (9)$$

und

$$R = \frac{1}{2}(x^2 + x'^2).$$

Ableiten nach  $t$  ergibt

$$\begin{aligned} R' &= xx' + x'x'' \\ &= 2R \sin(\theta) \cos(\theta) + \sqrt{2R} \cos(\theta) f_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Wir beobachten

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{2R} \sin(\theta)}{\sqrt{2R} \cos(\theta)} = \frac{x}{x'},$$

leiten ab und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)} &= \frac{x'^2 - xx''}{x'^2} \\ &= \frac{2R \cos^2(\theta) - \sqrt{2R} \sin(\theta)(-f_0)}{2R \cos^2(\theta)} \\ \Rightarrow \theta' &= \cos^2(\theta) + (2R)^{-\frac{1}{2}} \sin(\theta) f_0 \end{aligned} \quad (11)$$

für  $R > 0$  und  $\cos(\theta) = 0$ , wobei im dritten Schritt die Gleichung für  $\cos(\theta) = 0$  wieder wohldefiniert ist. Zusätzlich können wir im Folgenden für Lösungen, die nicht die triviale Lösung mit  $x = x' = R$  sind, annehmen, dass  $R$  nie gleich 0 wird, da sich lokal eindeutige Lösungen nicht berühren. Genauer sei  $t_0 \in [0, T)$  mit  $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ , dann ist (1) an der Stelle  $t_0$  ein Anfangswertwertproblem, welches die Lipschitz-Bedingung erfüllt, also höchstens eine Lösung besitzt. Damit muss  $x$  die triviale Lösung sein, was einen Widerspruch zur Anfangswertbedingung aus Lemma 3 ergibt.

Auf der punktierten Kreisscheibe, für die

$$0 < x^2 + x'^2 < 2\lambda^2$$

beziehungsweise

$$0 < R < \lambda^2$$

gilt, definieren wir die Abbildung  $\varphi$  in diesen Polarkoordinaten:

$$(\theta_0, R_0) \mapsto (\theta_1, R_1) := (\theta(1) - 2\pi N, R(1)),$$

wobei  $(\theta, R)$  die Lösung der Differentialgleichungen (10) und (11) mit den Anfangswerten  $\theta(0) = \theta_0$  und  $R(0) = R_0$  ist. Da Polarkoordinaten unter Addition von  $2\pi\mathbb{Z}$  an  $\theta$  invariant sind, ist die Subtraktion von  $2\pi N$  in der ersten Variable valide. Damit stimmen die Darstellungen von  $\varphi$  überein und  $\varphi$  in Polarkoordinaten  $S \rightarrow \hat{S}$  ist erneut ein Homöomorphismus, wobei das Inverse von  $\varphi$  in Polarkoordinaten die passende Darstellung (bezüglich der Invarianz des Winkels unter Addition von  $2\pi\mathbb{Z}$ ) haben muss. Dabei ist  $S := \{(\theta, R) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq R \leq \lambda^2\}$  und  $\varphi(S) \subseteq \hat{S} := \{(\theta, R) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq R \leq C\}$ , für ein genug großes  $C > \lambda^2$ . Später werden wir in dieser Darstellung von  $\varphi$  einen Fixpunkt finden, also eine Lösung  $(\theta, R)$  mit  $\theta(1) = \theta(0) + 2\pi N$  und  $R(0) = R(1)$ . Diese Eigenschaft führt zu einer zugehörigen periodischen Lösung  $(x, x')$  und mit ein paar weiteren Aussagen zu exakt  $2N$  Nullstellen von  $x$ . Betrachten wir mit  $y = x'$  die 2-Form  $dx \wedge dy$  und

setzen die Polarkoordinaten ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= dx \wedge dx' \\
&= \left( \sqrt{2R} \cos(\theta) d\theta + \frac{1}{\sqrt{2R}} \sin(\theta) dR \right) \\
&\wedge \left( -\sqrt{2R} \sin(\theta) d\theta + \frac{1}{\sqrt{2R}} \cos(\theta) dR \right) \\
&= -2R \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \wedge d\theta + \cos^2(\theta) d\theta \wedge dR \\
&\quad - \sin^2(\theta) dR \wedge d\theta + \frac{1}{2R} \sin(\theta) \cos(\theta) dR \wedge dR \\
&= \cos^2(\theta) d\theta \wedge dR - \sin^2(\theta) dR \wedge d\theta \\
&= \cos^2(\theta) d\theta \wedge dR + \sin^2(\theta) d\theta \wedge dR \\
&= (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta \wedge dR \\
&= d\theta \wedge dR.
\end{aligned}$$

Damit bleibt die Eigenschaft, dass  $\varphi$  maßerhaltend ist, unter den gewählten Polarkoordinaten erhalten. Da  $x = x' = 0$  eine Lösung der Differentialgleichung ist, ist  $\varphi(\theta, 0) \in \mathbb{R} \times 0$ , also  $R = 0$  invariant unter  $\varphi$ .

Als nächstes zeigen wir, dass die *twist-condition* erfüllt wird, da

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta_0, R_0) - \theta_0 &> 0 \quad \text{für } R_0 \geq \lambda^2 \\
\varphi(\theta_0, 0) - \theta_0 &< 0
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\theta_1 - \theta_0 &> 0 \quad \text{für } R_0 \geq \lambda^2, \\
\theta_1 - \theta_0 &< 0 \quad \text{für } R_0 = 0
\end{aligned}$$

gilt. Sei also  $\theta$  die Lösung zu den Anfangswerten  $(\theta_0, R_0)$  mit  $R_0 \geq \lambda^2$ . Damit gilt  $x(0)^2 + x'(0)^2 = 2R_0 \geq 2\lambda^2 \geq 2\lambda_{n,\Gamma_0}^2$  und da insbesondere  $f \in \mathcal{F}_{\Gamma_0}$  gilt, folgt nach Lemma 3, dass die Lösung  $x$  mindestens  $n$  Nullstellen in  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1)$  besitzt.

Einsetzen in (8) liefert

$$0 = x(t_i) = \underbrace{\sqrt{2R}}_{>0} \sin(\theta(t_i))$$

und damit  $\theta(t_i) \in \pi\mathbb{Z}$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Wir setzen  $t_i$  in (11) ein und erhalten mit  $R \neq 0$

$$\theta' = \underbrace{\cos^2(\theta(t_i))}_{=1} + (2R)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\sin(\theta(t_i))}_{=0} f_0 = 1$$

für alle  $1 \leq i \leq n$ . Das bedeutet, dass  $\theta$  in den Stellen  $t_1, \dots, t_n$ , in denen  $\theta$  in  $\pi\mathbb{Z}$  liegt, eine positive Steigung besitzt. Also durchquert  $\theta$  mindestens  $n$  der Punkte aus  $\pi\mathbb{Z}$  aufsteigend. Damit folgt  $\theta(1) - \theta(0) > (n-1)\pi = 2N\pi > 0$  bzw.  $\theta_1 + 2N\pi - \theta_0 > 2N\pi$  und so die erste Bedingung der *twist-condition*.

Betrachten wir die Differentialgleichung (11) bezüglich  $\theta$  für kleine Werte von  $R > 0$ , also kleine Werte von  $x$ , für die  $f_0 = f$  gilt, folgern wir

$$\begin{aligned} \theta' &= \cos^2(\theta) + (2R)^{-\frac{1}{2}} \sin(\theta) f_0(t, x) \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \frac{f(t, x)}{x} \\ &= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \frac{f(t, x) - \overbrace{f(t, 0)}^{=0}}{x - 0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t, 0)}_{=: p(t)}. \end{aligned}$$

Sei nun  $y$  eine nichttriviale Lösung von  $y'' + p(t)y = 0$  mit  $n_0$  Nullstellen in  $[0, 1]$ .

Wir verwenden die gleichen Polarkoordinaten wie oben, diesmal für  $y$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2\hat{R}} \sin(\hat{\theta}), \\ y' &= \sqrt{2\hat{R}} \cos(\hat{\theta}) \end{aligned} \tag{12}$$

und erhalten analog

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\theta}'}{\cos^2(\hat{\theta})} &= \frac{y'^2 - yy''}{y'^2} \\
&= \frac{2R \cos^2(\hat{\theta}) - \sqrt{2\hat{R}} \sin(\hat{\theta})(-py)}{2\hat{R} \cos^2(\hat{\theta})} \\
\Rightarrow \hat{\theta}' &= \cos^2(\theta) + (2R)^{-\frac{1}{2}} \sin(\theta)py \\
&= \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)p = \theta,
\end{aligned}$$

wobei wir erneut  $R > 0$  fordern können. Das bedeutet, wir können die gleiche Überlegung wie bei der ersten Bedingung der *twist-condition* nutzen.  $y$  besitzt die Nullstellen  $t_1, \dots, t_{n_0}$  in  $[0, 1)$  und mit (12) ist  $\theta(t) \in \pi\mathbb{Z}$  genau dann, wenn  $t = t_i$  für ein  $1 \leq i \leq n_0$ . In den Nullstellen  $t_i$  gilt

$$\theta = \hat{\theta}' = \underbrace{\cos^2(\hat{\theta}(t_i))}_{=1} + \underbrace{\sin(\hat{\theta}(t_i))}_{=0} p = 1,$$

also durchquert  $\theta$  exakt  $n_0$  aufsteigende Punkte in  $\pi\mathbb{Z}$  und es folgt  $\theta(1) - \theta(0) \in [(n_0 - 1)\pi, (n_0 + 1)\pi]$ . Fordern wir also  $N \geq \lceil \frac{n_0}{2} + 1 \rceil$  ( $> \frac{n_0+1}{2}$ ) folgt  $\theta(1) - \theta(0) \leq (n_0 + 1)\pi < 2N\pi$  bzw.  $\theta_1 - \theta_0 < 0$  und damit die zweite Bedingung der *twist-condition*.

Nun lässt sich der Poincaré-Birkhoff Fixpunktsatz (Satz 2) anwenden und wir erhalten einen Fixpunkt  $(\theta_0, R_0)$  mit  $0 < R_0 < \lambda^2$ , sodass für die zugehörige Lösung  $(\theta, R)$

$$(\theta(0), R(0)) = (\theta_0, R_0) = \varphi(\theta_0, R_0) = (\theta_1, R_1) = (\theta(1) - 2\pi N, R(1))$$

gilt und somit  $(x, x')$  1-periodisch ist, da  $f$  in  $t$  1-periodisch ist und die Anfangswerte  $(x(0), x'(0))$  und  $(x(1), x'(1))$  übereinstimmen. Mit der obigen Beobachtung, dass  $\theta$  Punkte in  $\pi\mathbb{Z}$  aufsteigend durchwandert, folgt aus  $\theta(1) = \theta(0) + 2\pi N$  exakt  $2N$  Nullstellen von der zugehörigen Lösung  $x$  in  $[0, 1)$ . Da mit der a priori Schätzung

aus Lemma 4 und der Wahl von  $c$ , wie oben erwähnt, die Lösung  $x$  durch  $\pm c$  beschränkt ist, ist  $x$  ebenfalls eine Lösung von (1) für das ursprüngliche  $f$ .  
Damit sind die Anforderungen an  $x$  erfüllt und das Theorem 1 bewiesen.

## 7 Eine Folgerung des Jacobowitz-Hartman Theorems

Nachdem wir das Jacobowitz-Hartman Theorem (Theorem 1) bewiesen haben, können wir recht einfach den Beweis umformulieren, sodass wir folgende Aussage erhalten:

**Theorem 2:** Unter den gleichen Voraussetzung und Bezeichnungen wie in Theorem 1 existiert für  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p \geq qN_0$  und  $N_0 = \lceil \frac{m_0}{2} + 1 \rceil$  eine periodische Lösung von (1) der Periode  $q$  mit exakt  $2p$  Nullstellen in  $[0, q)$ . Weiter sind Lösungen, die zu unterschiedlichen  $\frac{p}{q}$  korrespondieren, ungleich zueinander.

Der Beweis verläuft größtenteils wie der Beweis von Theorem 1, weshalb wir uns hier auf die Unterschiede konzentrieren.

**Beweis:** Wir können die bewiesenen Lemmata auch für diesen Beweis nutzen und folgen dem Beweis von Theorem 1. Wir setzen  $2T = q$  und  $n = 2p + 1$  und erhalten die a priori Aussage aus Lemma 4 für Lösungen von (1) mit höchstens  $n - 1$  Nullstellen in  $[0, q)$ . Wir beschränken das Wachstum von  $f$  für  $x > c$  mit  $c = 2\sqrt{\lambda}$  und  $\lambda = \max(\lambda_{n, \Gamma_0}, \frac{1}{4}b^2)$ . Wir folgen dem obigen Beweis, wobei wir  $\varphi = \varphi^q$  setzen. Dann ist  $\varphi$  in den gleichen Polarkoordinaten wie oben:

$$(\theta_0, R_0) \mapsto (\theta_1, R_1) := (\theta(q) - 2\pi p, R(q)).$$

Analog folgt, dass  $\varphi$  ein maßerhaltender Homöomorphismus auf der punktierten Kreisscheibe ist. Nun müssen wir die *twist-condition* zeigen:

$$\begin{aligned} \theta_1 - \theta_0 &> 0, & \text{für } R_0 = \lambda^2, \\ \theta_1 - \theta_0 &< 0, & \text{für } R_0 = 0. \end{aligned}$$

Sei zunächst  $(\theta, R)$  eine Lösung zur Anfangswertbedingung  $R(0) = \lambda^2$ . Dann folgt, dass  $x$  mindestens  $n$  Nullstellen in  $[0, q)$  besitzt und damit  $\theta$  mindestens  $n$  Punkte in  $\pi\mathbb{Z}$  wie oben aufsteigend durchläuft und es folgt  $\theta(q) - \theta(0) > (n - 1)\pi = 2p\pi$

und damit die erste Bedingung. Für  $R_0 = 0$  erhalten wir analog

$$\theta' = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\gamma(t).$$

Sei wieder  $y$  eine nichttriviale Lösung von  $y'' + \gamma(t)y = 0$  mit  $n_0$  Nullstellen in  $[0, 1)$ . Da  $f$  und damit auch  $\gamma$  periodisch in  $t$  ist, ist  $y(m + t)$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  ebenfalls eine nichttriviale Lösung von  $y'' + \gamma(t)y = 0$  in  $[0, 1)$  mit  $n_0$  Nullstellen. Es folgt analog zu obigem Beweis

$$\begin{aligned} \theta(m + 1) - \theta(m) &\leq (n_0 + 1)\pi \text{ für } m < q \\ \Rightarrow \theta(q) - \theta(0) &= \sum_{m=0}^{q-1} \theta(m + 1) - \theta(m) \\ &\leq q(n_0 + 1)\pi \end{aligned}$$

und mit

$$p \geq qN_0 = q\left[\frac{n_0}{2} + 1\right] > q\left(\frac{n_0}{2} + \frac{1}{2}\right) = q\frac{n_0 + 1}{2}$$

folgt  $\theta(q) - \theta(0) \leq q(n_0 + 1)\pi < 2\pi p$ , also die zweite Bedingung. Der Rest des Beweises ist analog zum Beweis von Theorem 1.

Seien nun  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen mit genau  $p_1$  bzw.  $p_2$  Nullstellen in  $[0, q_1)$  bzw.  $[0, q_2)$ , mit  $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$  und  $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}$ . Damit besitzt  $x_1$  in  $[0, q_1 q_2)$  genau  $p_1 q_2$  Nullstellen, sowie  $x_2$  in  $[0, q_1 q_2)$  genau  $p_2 q_1$ . Da aber mit  $\frac{p_1}{q_1} \neq \frac{p_2}{q_2}$  auch  $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$  gilt, können  $x_1$  und  $x_2$  nicht gleich sein.

Damit haben wir ein Theorem gezeigt, von dem das Jacobowitz-Hartman Theorem ein Spezialfall ist (mit  $q = 1$  und  $p = N$ ).

## 8 Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde das Jacobowitz-Hartman mithilfe des Poincaré-Birkhoff Fixpunktsatzes bewiesen. Dabei ließ sich feststellen, warum Fixpunktsätze einen hohen Stellenwert in der Mathematik haben. Durch passende Umformungen konnten wir die Problemstellung auf diesen, bereits bekannten, Fixpunktsatz reduzieren. Eine weitergehende Beschäftigung der Thematik könnte in mehrere Richtungen sinnvoll sein. Zum einen wäre es eine interessante Untersuchung, die Prämissen des Jacobowitz-Hartman Theorems in der hier formulierten Form zu überprüfen. Etwa kann man die stetige Differenzierbarkeit von  $f$  fallen lassen, solange man lokale Lipschitzstetigkeit von  $f$  in  $x$  und Existenz und Stetigkeit von  $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, 0)$  fordert wie in [6] beschrieben. Zum anderen lassen sich sowohl der Fixpunktsatz von Poincaré und Birkhoff, als auch das Jacobowitz-Hartman Theorem im  $\mathbb{R}^n$  in gewisser Form formulieren und anscheinend auch beweisen, wie etwa in [9] beschrieben.

## 9 Literaturverzeichnis

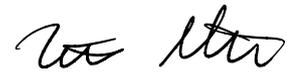
- [1] O'Connor, J. J. und Robertson, E. F., "Stefan Banach." <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach/>, Februar 2000. Aufgerufen am 09.09.2021.
- [2] Newhouse, Sheldon E., "on a differentiable linearization theorem of Philip Hartman." <https://arxiv.org/pdf/1510.03779.pdf>, Mai 2017. Aufgerufen am 09.09.2021.
- [3] O'Connor, J. J. und Robertson, E. F., "Jules Henri Poincaré." <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare/>, Oktober 2003. Aufgerufen am 09.09.2021.
- [4] O'Connor, J. J. und Robertson, E. F., "George David Birkhoff." <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Birkhoff/>, September 2001. Aufgerufen am 09.09.2021.
- [5] O'Connor, J. J. und Robertson, E. F., "William Rowan Hamilton." <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamilton/>, Juni 1998. Aufgerufen am 09.09.2021.
- [6] Moser, Jürgen und Zehnder, Eduard, *Notes on Dynamical Systems*, vol. 12. American Mathematical Soc., 2005.
- [7] Fasano, Antonio und Marmi, Stefano, *Analytical Mechanics*, vol. 1. Oxford University Press, 2006.
- [8] Guggenheimer, Heinrich Walter, *Applicable geometry*, vol. 1. R. E. Krieger Pub. Co., 1997.
- [9] A. Fonda and A. Sfecci, "Periodic solutions of weakly coupled superlinear systems," *Journal of Differential Equations*, vol. 260, no. 3, pp. 2150–2162, 2016.

## 10 Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form in keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Heidelberg, 14.09.2021

Ort, Datum

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized first name and a last name.

Unterschrift