

Bachelorarbeit

Über die Hyperbolizität des Kurvengraphen

Lukas Bohsung

Datum der Abgabe: 4. Juli 2018

Betreuung: Prof. Dr. Maria Beatrice Pozzetti / Christoph Karg

Fakultät für Mathematik und Informatik

Universität Heidelberg

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
1. Grundlagen	10
1.1. Grundlagen über geometrische Gruppentheorie	10
1.2. Grundlagen über Flächen	12
2. Kurven und Bögen auf Flächen	16
2.1. Das Bigon-Kriterium	17
3. Die Abbildungsklassengruppe	23
3.1. Definition und Beispiele	23
3.2. Der Dehn-Twist	25
4. Der Kurvengraph	29
5. Die Hyperbolizität des Kurvengraphen	34
5.1. Eineckbögen, Eineckpfade und die Hyperbolizität des Bogengraphen	35
5.2. Die Hyperbolizität des Kurvengraphen	48

ABSTRACT. In dieser Bachelor Arbeit wird es um die Hyperbolizität des Kurvengraphen gehen. Das wichtigste Resultat wird sein, dass der Kurvengraph für jede kompakte, zusammenhängende und orientierbare Fläche 17-hyperbolisch ist. Um dies zu zeigen, werden wir Eineckpfade definieren, welche die schöne Eigenschaft haben, dass sie „nahe“ an Geodäten liegen. Mit deren Hilfe werden wir auch zeigen können, dass der Bogengraph 7-hyperbolisch ist. Außerdem werden wir uns ein wenig mit Flächen, Kurven auf Flächen und der Abbildungsklassengruppe beschäftigen.

Einleitung

In dieser Arbeit wird es hauptsächlich um den sogenannten Kurvengraphen gehen. Wir werden den Kurvengraphen von kompakten, zusammenhängenden und orientierbaren Flächen betrachten. Seine Eckenmenge stimmt mit der Menge der Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven auf der Fläche überein. Zwei Ecken des Kurvengraphen sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn es Repräsentanten gibt, welche disjunkt sind. Der Kurvengraph wurde zuerst von Bill Harvey [1, Seite 245-251] definiert. Genauer gesagt definierte er den Kurvenkomplex, dessen 1-Skelett der Kurvengraph ist. Die natürliche Inklusion des Kurvengraphen in den Kurvenkomplex ist eine Quasi-Isometrie, weshalb wir uns in dieser Arbeit auch nur mit dem Kurvengraphen beschäftigen werden.

Nachdem wir einige grundlegende Eigenschaften des Kurvengraphen behandelt haben, werden wir uns der Hyperbolizität des Kurvengraphen zuwenden. Dass der Kurvengraph geodätisch und hyperbolisch ist, wurde zuerst von Masur und Minsky in [2] gezeigt. Später zeigte Bowditch [3], dass man eine Hyperbolizitätskonstante findet, welche logarithmisch in Abhängigkeit von der Komplexität der Fläche wächst. Dieses Ergebnis wurde dann, unabhängig von einander, von Aougab [4], Bowditch [5] und Clay, Rafi und Schleimer [6] präzisiert und zwar dahingehend, dass die Hyperbolizitätskonstante unabhängig von der Fläche ist. Im Folgenden werden wir uns ein Ergebnis von Sebastian Hensel, Piotr Przytycki und Richard C. H. Webb [7] genauer ansehen, welches besagt, dass die Hyperbolizitätskonstante genau 17 ist. Neben der Hyperbolizität sind auch einige andere Eigenschaften des Kurvengraphen bekannt. Zum Beispiel wurde von Masur und Minsky in [8] gezeigt, dass der Kurvengraph unendlichen Durchmesser hat und Birman und Menasco zeigten [9], dass der Kurvengraph sogenannte dead ends mit einer Tiefe von

1 hat. Um zu verstehen, was ein dead end ist, seien a und b zwei Ecken in einem Graphen, welche durch eine Geodäte der Länge n verbunden sind. Die Ecke b heißt dead end der Tiefe n bezüglich a , wenn die Geodäte nicht zu einer Geodäte der Länge $n + 1$ verlängert werden kann. Das heißt, jede Ecke c , welche Abstand 1 zu b hat, hat höchstens Abstand n zu a .

Doch warum ist der Kurvengraph so interessant? Um das zu verstehen, müssen wir uns die sogenannte Abbildungsklassengruppe von Flächen anschauen. Diese ist definiert als Menge der orientierungserhaltenden Homeomorphismen einer Fläche, welche den Rand festhalten, wobei Homeomorphismen, welche homotop zur Identität sind, als gleich betrachtet werden. Diese Gruppe ist in vielen Bereichen der Mathematik von großem Interesse. Doch häufig ist es schwierig, Eigenschaften dieser Gruppe mit algebraischen Methoden zu zeigen. Eine sinnvolle Alternative bietet die geometrische Gruppentheorie. In der geometrischen Gruppentheorie versucht man mit Hilfe geometrischer Methoden, algebraische Eigenschaften von Gruppen zu zeigen. Häufig lässt man die zu untersuchende Gruppe auf einem geeigneten metrischen Raum wirken. An dieser Stelle kommt der Kurvengraph zum Einsatz. Nachdem man den Kurvengraph mit einer Metrik ausgestattet hat, kann man sich die Wirkung der Abbildungsklassengruppe auf den Kurvengraphen anschauen. Ivanov zeigte in [10], dass die Automorphismengruppe des Kurvengraphen einer Fläche mit der Abbildungsklassengruppe dieser Fläche übereinstimmt. Lickorish zeigte in [11], dass die Abbildungsklassengruppe einer Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ von $3g - 1$ Dehn-Twists erzeugt wird. Ein Dehn-Twist ist ein Beispiel einer von drei Kategorien, in welche man die Elemente der Abbildungsklassengruppe einteilen kann. Diese Klassifikation ist bekannt als Nielsen-Thurston-Klassifikation und besagt, dass jedes Element f der Abbildungsklassengruppe entweder periodisch (das heißt, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass f^n homotop zur Identität ist), reduzibel (das heißt, f hält mindestens eine Homotopieklasse einfacher, essentieller Kurven fest) oder pseudo-anosov ist (das heißt, es existiert ein $\lambda > 1$ und zwei entgegengesetzte Blätterungen F^s und F^u , sodass $f(F^s) = \lambda^{-1}F^s$ und $f(F^u) = \lambda F^u$).

Im ersten Kapitel werden wir einige grundlegende Begriffe der geometrischen Gruppentheorie wiederholen. Vorallem wird es in diesem Teil um Graphen gehen. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir uns mit Flächen beschäftigen. Das wichtigste Resultat, allerdings ohne Beweis, wird die Charakterisierung von Flächen, Satz 1.17, sein, welche uns erlaubt, Flächen bis auf Homeomorphie zu klassifizieren.

Im zweiten Kapitel wird es dann um Kurven und Bögen auf Flächen gehen. Nachdem wir einige Eigenschaften definiert haben, werden wir uns Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven anschauen. Wir werden den Begriff der Schnittzahl von Homotopieklassen kennenlernen und in diesem Zusammenhang auch, was es bedeutet, dass zwei Kurven in minimaler Position sind. Wichtigstes Ergebnis ist das Bigon-Kriterium, Satz 2.10, welches uns dabei hilft, zu entscheiden, ob zwei Kurven tatsächlich in minimaler Position sind.

Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns ein wenig mit der Abbildungsklassengruppe. Nachdem wir die Abbildungsklassengruppe definiert haben und sie für einige einfache Flächen berechnet haben, werden wir uns eine Menge von sehr interessanten Elementen der Abbildungsklassengruppe anschauen, die sogenannten Dehn-Twists.

In Kapitel Vier lernen wir den Kurvengraphen kennen. Wir werden eine sehr wichtige Eigenschaft zeigen und zwar, dass der Kurvengraph zusammenhängend ist. Da wir uns in Kapitel Fünf mit der Hyperbolizität des Kurvengraphen beschäftigen werden, ist es essentiell zunächst einzusehen, dass er zusammenhängend ist. Außerdem werden wir sehen, dass von jeder Ecke unendlich viele Kanten abgehen. Wie schon erwähnt wird es in Kapitel Fünf um die Hyperbolizität des Kurvengraphen gehen. Bevor wir uns allerdings dem Kurvengraphen zuwenden, müssen wir uns zunächst mit dem Bogengraphen beschäftigen. Wir werden bestimmte Bögen, die sogenannten Eineckbögen, definieren. Deren Homotopieklassen bilden Ecken von Pfaden, welche „nahe“ an Geodäten liegen. Mit der Hilfe dieser Pfade, werden wir zeigen, dass der Bogengraph 7-hyperbolisch ist, Satz 5.15. Anschließend können wir zeigen, dass der Kurvengraph 17-hyperbolisch ist, Satz 5.20.

ABSTRACT. This bachelor's thesis will deal with the hyperbolicity of the Curve Graph. The main result will be that the Curve Graph is 17-hyperbolic for any compact, connected and orientable surface. To show this, we will define unicorn paths, which have the nice property to be "close" to geodesics. With the help of these paths we will also be able to show that the Arc Graph is 7-hyperbolic. Additionally, we will deal with surfaces, curves on surfaces, and the Mapping Class Group.

Introduction

This work will mainly deal with the so-called Curve Graph. We will examine the Curve Graph of compact, connected and orientable surfaces. The vertex set of the Curve Graph agrees with the set of homotopy classes of simple and essential curves on the surface. Two vertices are connected by an edge, if and only if there are representatives which are disjoint. The Curve Graph was introduced by Bill Harvey [1, Seite 245-251]. Specifically, he defined the Curve Complex, whose one-skeleton is the Curve Graph. The natural inclusion of the Curve Graph into the Curve Complex is known to be a quasi-isometry, which is why in this work we will only deal with the Curve Graph.

After we have covered some of the basic properties of the Curve Graph, we will turn to the hyperbolicity of the Curve Graph. As shown by Masur and Minsky [2] the Curve Graph is geodesic and hyperbolic. Later Bowditch [3] proved, that it is possible to find a hyperbolicity constant, which grows logarithmically with the complexity of the surface. This result was specified by Aougab [4], Bowditch [5] and Clay, Rafi and Schleimer [6]. They showed, independently, that the hyperbolicity constant is independent of the surface. Hereinafter we will investigate a result of Sebastian Hensel, Piotr Przytycki und Richard C. H. Webb [7], which states that the hyperbolicity constant is exactly 17. In addition to the hyperbolicity, also some other properties of the Curve Graph are known. For example, it was proofed by Masur and Minsky [8] that the Curve Graph has infinite diameter and Burman and Menasco showed in [9] that the Curve Graph has dead ends of depth one. To understand what a dead end of depth n is, we take two vertices a and b in a graph which are connected by a geodesic of length n . The vertex b is called, dead end of depth n with respect to a , if the geodesic between a and b cannot be extended to a geodesic of length $n + 1$. In other words, for every vertex c , which has a distance 1 to b , the distance between a and c is less than or equal to n .

But why is the Curve Graph so interesting? To answer that, we have to look at the so-called Mapping Class Group of a surface. This group is defined as the set of orientation-preserving homeomorphisms, which fixes the boundary pointwise, where homeomorphisms which are homotopic to identity being considered to be equal. This group is of great interest in many areas of mathematics. However, it is often difficult to show properties of this group using algebraic methods. A reasonable alternative is provided by geometric group theory. Geometric group theory tries to show algebraic properties of groups by using geometric methods. A promising method is to let the group, under examination, act on a suitable metric space. Here the Curve Graph plays an important role. After having equipped the Curve Graph with a metric, one can examine the acting of the Mapping Class Group on the Curve Graph. Ivanov showed in [10] that the automorphism group of the Curve Graph of a surface agrees with the Mapping Class Group of this surface. Lickorish showed in [11] that the Mapping Class Group of a surface of genus $g \geq 1$ is generated by $3g - 1$ Dehn-Twists. A Dehn-Twist is an example of one of three categories into the elements of the Mapping Class Group can be classified. This classification is known under the name Nielsen-Thurston-Classification and states that every element f of the Mapping Class Group is either periodic (that means there exists a $n \in \mathbb{N}$ such that f^n is homotopic to identity), reducible (that is, f fixes at least one homotopy class of simple and essential curves) or pseudo-anosov (that is, there exist a $\lambda > 1$ and two transverse measured foliations F^s and F^u , such that $f(F^s) = \lambda^{-1}F^s$ and $f(F^u) = \lambda F^u$).

In the first chapter, we will repeat some basic concepts of geometric group theory, mostly we will deal with graphs. In the second part of this chapter we will discuss surfaces. The most important result, without proofing, will be the characterization of surfaces, Satz 1.17, which allows us to classify surfaces up to homeomorphism. The second chapter will be about curves and arcs on surfaces. After defining some properties, we will look at homotopy classes of simple, essential curves. We will define the intersection number of homotopy classes and in this context we will also discuss what it means that two curves are in minimal position. The most important result will be the bigon criterion, Satz 2.10, which helps us to decide if two given curves are in minimal position.

In the third chapter we will discuss some basics of the Mapping Class Group. After defining the Mapping Class Group and computing it for some simple surfaces, we will study the so-called Dehn-Twists, which are very interesting elements of the

Mapping Class Group.

In chapter four we introduce the Curve Graph. We will show one very important feature, namely that the graph is connected. Since we will deal with the hyperbolicity of the Curve Graph in the chapter five, it is essential to understand first that the Curve Graph is connected. Additionally, we will see that there are infinite many edges at each vertex.

As already mentioned, chapter five will deal with the hyperbolicity of the Curve Graph. Before we turn to the Curve Graph we have to spend some time for the Arc Graph. We will define certain arcs, the so-called unicorn arcs. Their homotopy classes form vertices of paths, which are "close" to geodesics. With the help of these paths we will show that the Arc Graph is 7-hyperbolic, Satz 5.15. Finally we will be able to show that the Curve Graph is 17-hyperbolic, Satz 5.20.

1. Grundlagen

1.1. Grundlagen über geometrische Gruppentheorie

Wir wollen in diesem Abschnitt einige, für uns wichtige Begriffe der geometrischen Gruppentheorie wiederholen und orientieren uns dabei an [19].

In der geometrischen Gruppentheorie beschäftigt man sich mit dem Zusammenhang von algebraischen und geometrischen Eigenschaften von Gruppen. Genauer gesagt versucht man algebraische Aussagen über Gruppen mittels geometrischen Methoden zu beweisen. Um dies zu tun, verfolgt man normalerweise zwei Ansätze, entweder man betrachtet eine Wirkung, der zu untersuchenden Gruppe, auf einem geeigneten metrischen Raum, oder man betrachtet die Gruppe selbst als metrischen Raum. Oft sind die metrischen Räume, auf denen die Gruppe wirkt, Graphen.

Definition 1.1. Ein *Graph* Γ ist ein Tupel $\Gamma = (V, E)$ disjunkter Mengen, wobei V eine Menge von Ecken ist und E eine Menge von zweielementigen, ungeordneten Teilmengen von V , welche Kanten zwischen zwei Ecken beschreiben.

Definition 1.2. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph und sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Folge v_0, \dots, v_n paarweise verschiedener Ecken $v_0, \dots, v_n \in V$ heißt *Pfad*, wenn $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$, das heißt, wenn je zwei aufeinanderfolgende Ecken durch eine Kante verbunden sind.

Wir sagen Γ ist zusammenhängend, wenn für je zwei Ecken $v_1, v_2 \in V$ ein Pfad zwischen v_1 und v_2 existiert.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels seien alle Graphen zusammenhängend.

Bemerkung 1.3. Wir können jeden Graphen Γ als einen metrischen Raum betrachten, indem wir jede Kante mit einer Länge versehen. In unserem Fall werden wir die Länge einer Kante immer auf 1 setzen. Die Länge $l(p)$ eines Pfades p setzen wir auf die Anzahl der Kanten in p . Für zwei Ecken v_0, v_1 definieren wir dann folgenden Metrik

$$|v_0, v_1|_\Gamma = \min\{l(p) \mid p \text{ Pfad zwischen } v_0 \text{ und } v_1\}$$

Die folgenden Definitionen, zusätzliche Beispiele und ausführlichere Erklärungen findet man in [19]. In diesem Buch werden die meisten Begriffe allgemeiner für alle metrischen Räume definiert. Da wir uns aber nur mit Graphen beschäftigen werden, genügen uns auch diese etwas weniger allgemeinen Definitionen.

Definition 1.4. Sei Γ ein Graph und p ein Pfad zwischen zwei Ecken v_0 und v_1 . Wir nennen p eine *Geodäte* zwischen v_0 und v_1 , wenn gilt

$$l(p) = |v_0, v_1|_\Gamma$$

Das heißt, eine Geodäte ist der kürzeste Pfad zwischen zwei Ecken.

Definition 1.5. Sei Γ ein Graph, welcher mit einer Metrik versehen ist. Sei $p = v_0, \dots, v_k$ ein Pfad in Γ , das heißt, v_0, \dots, v_k sind Ecken in Γ . Wir sagen p ist eine *c-Quasi-Geodäte*, wenn

$$|i, j| \leq c|v_i, v_j|_\Gamma$$

Das heißt eine *c-Quasi-Geodäte* ist ein Pfad, der nur um einen konstanten Faktor von einer Geodäte entfernt ist. Man sagt auch, er liegt „nahe“ an einer Geodäte.

Definition 1.6. Seien v_0, v_1, v_2 drei Ecken in einem Graphen Γ und seien p_0, p_1, p_2 drei Geodäten, wobei, für $i = 0, 1$ verlaufe p_i zwischen v_i und v_{i+1} und p_2 verlaufe zwischen v_0 und v_2 . In diesem Fall sagen wir, dass p_0, p_1, p_2 ein *geodätisches Dreieck* Δ bilden. Manchmal werden wir das geodätische Dreieck auch nach den Ecken benennen, also $\Delta = v_0v_1v_2$.

Definition 1.7. Seien p_0, p_1, p_2 Geodäten in einem Graph Γ , welche ein geodätisches Dreieck $\Delta = p_0p_1p_2$ bilden. Wir sagen Δ ist *δ -zentriert* an einer Ecke c , wenn gilt

$$|c, p_i|_\Gamma \leq \delta \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Das heißt, wenn alle Kanten höchstens Abstand δ zu c haben. Dabei sei der Abstand von einer Ecke c zu einem Pfad p wie folgt definiert

$$|c, p|_\Gamma = \min\{|c, v_i|_\Gamma \mid v_i \text{ Ecken von } p\}$$

Ein Graph Γ heißt *δ -hyperbolisch*, wenn für jedes geodätische Dreieck eine Ecke c existiert, sodass das geodätische Dreieck δ -zentriert an c ist.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten Hyperbolizität eines Graphen zu definieren. Eine Möglichkeit ist die folgende:

Definition 1.8. Seien p_0, p_1, p_2 Geodäten in einem Graph Γ , welche ein geodätisches Dreieck $\Delta = p_0p_1p_2$ bilden. Wir sagen Δ ist *δ' -dünn*, wenn gilt

$$p_i \subset U_\delta(p_j \cup p_k) \text{ mit } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

wobei U_δ eine δ' -Umgebung sein soll.

In anderen Worten, Δ ist δ' -dünn, wenn jede Seite des geodötischen Dreiecks in der Vereinigung der δ -Umgebungen der anderen beiden Seiten enthalten ist.

Ein Graph Γ heißt δ' -hyperbolisch, wenn jedes geodätische Dreieck δ' -dünn ist.

Diese beiden Definitionen von Hyperbolizität sind nicht direkt äquivalent. Aber man kann zeigen, dass ein $k > 1$ existiert, sodass ein Graph, genau dann δ' -hyperbolisch, im Sinne von Definition 1.8, ist wenn er $k \cdot \delta$ -hyperbolisch, im Sinne von Definition 1.7, ist. Der Beweis kann in [20, Kapitel 3, H, Proposition 1.17] nachgelesen werden.

In dieser Arbeit werden wir, wenn wir von Hyperbolizität eines Graphen sprechen, immer die Hyperbolizität im Sinne von Definition 1.7 meinen.

1.2. Grundlagen über Flächen

In diesem Abschnitt werden wir uns ein wenig mit grundlegenden Eigenschaften von Flächen beschäftigen. Wir werden uns zunächst die Definition und einige Beispiele von Flächen anschauen. Dann werden wir einen Satz formulieren, mit dessen Hilfe sich Flächen charakterisieren lassen. Da wir Flächen aus topologischer Sicht betrachten, ist der Begriff des Homeomorphismus sehr wichtig, weshalb wir auch mit der folgenden Definition starten.

Definition 1.9. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Homeomorphismus*, wenn f bijektiv und stetig ist und die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist.

Definition 1.10. Eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* M ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:

- (i) M ist ein Hausdorffraum (das heißt, für je zwei verschiedene Elemente aus M existieren disjunkte, offene Umgebungen).
- (ii) M ist lokal homeomorph zu einer Teilmenge des \mathbb{R}^n .

Definition 1.11. Eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein topologischer Raum mit folgenden Eigenschaften:

- (i) M ist ein Hausdorffraum.
- (ii) M ist lokal homeomorph zu einer Teilmenge des $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$.

Definition 1.12. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. M heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

M heißt *zusammenhängend*, wenn M nicht in zwei disjunkte offene Mengen zerlegt werden kann.

Im Folgenden werden wir uns nur mit 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten beschäftigen. Diese werden auch *Flächen* genannt. Weiterhin seien alle Flächen, die wir behandeln, kompakt und zusammenhängend. Zunächst geben wir einige Beispiele für solche Flächen an. Es gibt mehrere Möglichkeiten Flächen darzustellen, als Quotientenraum (bei den Beispielen auf der linken Seite) oder als Planar-Diagramm (bei den Beispielen auf der rechten Seite). Ein Planar-Diagramm ist ein Polygon mit $2n$ Kanten, wobei zwei Kanten miteinander identifiziert werden können (wir beschriften die Kanten, welche miteinander identifiziert werden mit dem jeweils selben Buchstaben). Die Kanten können entweder mit der selben Orientierung oder entgegengesetzter Orientierung miteinander identifiziert werden (wir verdeutlichen dies mit Hilfe von Pfeilen auf den jeweils miteinander identifizierten Kanten). Für mehr Informationen über Planar-Diagramme und weitere Beispiele siehe [12, Kapitel 4].

Beispiel 1.13. Wir bezeichnen mit \mathbb{D} die abgeschlossene Kreisscheibe und mit \mathbb{S} den Rand von \mathbb{D} , also die Kreislinie.

- (i) Die Kugel \mathbb{S}^2 ist eine kompakte, zusammenhängende Fläche ohne Rand und ist gegeben durch

$$\mathbb{S}^2 = \mathbb{D}/\mathbb{S}$$

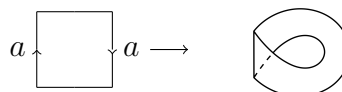

- (ii) Der Torus \mathbb{T}^2 ist eine kompakte, zusammenhängende Fläche ohne Rand und ist gegeben durch

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$


(iii) Das Möbiusband \mathbb{M} ist eine kompakte, zusammenhängende Fläche mit einer

Randkomponente und ist gegeben durch
 $\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} / \sim$

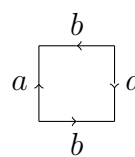
mit $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = 0, x' = 1,$
 $y = 1 - y'$



(iv) Die Projektive Ebene \mathbb{P}^2 ist eine kompakte, zusammenhängende Fläche ohne Rand und ist gegeben durch

$\mathbb{P}^2 = \mathbb{D} / \sim$

mit $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y), (x', y') \in \mathbb{S}$
 und $(x, y) = (-x, -y)$



Definition 1.14. Eine Fläche heißt *nicht-orientierbar*, wenn sie ein Möbiusband enthält, anderenfalls orientierbar.

Im Folgenden seien alle Flächen, die wir behandeln, orientierbar. Das heißt, wir werden uns nur noch mit kompakten, zusammenhängenden und orientierbaren Flächen beschäftigen.

Definition 1.15. Die *zusammenhängende Summe* zweier Flächen S_1 und S_2 ist eine Fläche $S_1 \# S_2$ und wird wie folgt konstruiert:

Entferne je eine offene Kreisscheibe von den beiden Flächen und identifiziere die beiden entstanden Randkomponenten miteinander.

Bemerkung 1.16. Auf natürliche Weise erhält man die zusammenhängende Summe von n Flächen S_1, \dots, S_n .

Satz 1.17 (Charakterisierung von Flächen). *Jede kompakte, zusammenhängende und orientierbare Fläche ist homeomorph zu genau einer der folgenden Flächen $\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \dots$*

Jede kompakte, zusammenhängende, nicht-orientierbare Fläche ist homeomorph zu genau einer der folgenden Flächen $\mathbb{M}^2, \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2, \dots$

Jede kompakte, zusammenhängende, orientierbare Fläche mit Rand ist homeomorph zu genau einer der folgenden Flächen $\mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \dots$, wobei jeweils eine endliche Anzahl offener Kreisscheiben entfernt werden, die sich nicht schneiden dürfen.

Jede kompakte, zusammenhängende, nicht-orientierbare Fläche mit Rand ist homöomorph zu genau einer der folgenden Flächen \mathbb{M}^2 , \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, ... , wobei jeweils eine endliche Anzahl offener Kreisscheiben entfernt werden, die sich nicht schneiden dürfen.

Beweis. Der Beweis kann in [13] nachgelesen werden. □

Bemerkung 1.18. Da wir uns im Folgenden nur mit kompakten, zusammenhängenden und orientierbaren Flächen auseinandersetzen werden, werden wir in dieser Bemerkung auch nur auf diese eingehen. Die Charakterisierung der Flächen sagt uns also, dass jede kompakte, zusammenhängende, orientierbare Fläche bis auf Homeomorphie, eindeutig bestimmt ist durch ihr Geschlecht g (siehe Definition 2.7) und die Anzahl ihrer Randkomponenten b (Anzahl der entfernten offenen Kreisscheiben). Die exakte Definition für das Geschlecht einer Fläche folgt später, für den Moment können wir uns das Geschlecht als die Anzahl der "Löcher" in S vorstellen. Zum Beispiel hat \mathbb{S}^2 Geschlecht 0 und \mathbb{T}^2 Geschlecht 1.

Um aus einer kompakten Fläche eine nicht kompakte Fläche zu erhalten, entfernen wir eine endliche Anzahl Punkte von S , diese werden Punktionen genannt. Allerdings wollen wir uns nur mit kompakten Flächen beschäftigen, deshalb betrachten wir Punktionen nicht als entfernte Punkte, sondern als Markierungen.

Im Folgenden sei $S_{g,b,n}$ eine zusammenhängende, orientierbare Fläche vom Geschlecht g , mit b Randkomponenten und n Markierungen (diese ist nach den bisherigen Überlegungen eindeutig bis auf Homeomorphie). Weiterhin gelte folgende Notation, $S_{g,b,0} = S_{g,b}$ und $S_{g,0} = S_g$.

Eine weitere Homotopieinvariante ist die Euler-Charakteristik.

Definition 1.19. Sei $S = S_{g,b,n}$ eine Fläche vom Geschlecht g , mit b Randkomponenten und n Punktionen. Die *Euler-Charakteristik* von S ist wie folgt definiert:

$$\chi(S) = 2 - 2g - (b + n)$$

2. Kurven und Bögen auf Flächen

Im vorherigen Kapitel haben wir uns mit Flächen beschäftigt. In diesem Abschnitt seien alle Flächen, die wir behandeln, kompakt, zusammenhängend und orientierbar. Wir werden uns nun Kurven auf Flächen anschauen. Nachdem wir Kurven definiert haben und uns ein wenig mit Homotopie von Kurven beschäftigt haben, wenden wir uns der sogenannten Schnittzahl von Homotopieklassen von Kurven zu, welche die minimale Anzahl an Schnittpunkten von Repräsentanten zweier Homotopieklassen angibt. Außerdem werden wir ein Kriterium behandeln, mit dem wir entscheiden können, ob zwei Kurven geeignete (bezüglich der Schnittzahl) Repräsentanten ihrer Homotopieklassen sind.

Definition 2.1. Eine *Kurve* α auf S ist eine stetige Abbildung $\alpha : \mathbb{S} \rightarrow S$.

α heißt *einfach*, falls α injektiv ist.

α heißt *separierend*, falls $S \setminus \alpha$ unzusammenhängend ist.

α heißt *essentiell*, falls α nicht nullhomotop und nicht homotop zu einer Markierung oder einer Randkomponente ist.

Definition 2.2. Ein *Bogen* α auf S ist eine stetige Abbildung $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$.

α heißt *einfach*, falls α injektiv ist.

α heißt *essentiell*, falls α nicht homotop zu einem Teilbogen einer Randkomponente ist.

Definition 2.3. Seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen.

Die Abbildungen f und g heißen *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \quad (x, t) \mapsto H(x, t)$$

mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x) \forall x \in X$ gibt.

H heißt *Homotopie* von f nach g .

Existiert eine Homotopie von f nach g schreiben wir auch $f \sim g$.

Satz 2.4. Auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y , bildet Homotopie eine Äquivalenzrelation.

Die Äquivalenzklassen nennen wir *Homotopieklassen*.

Beweis. Seien g_0, g_1, g_2 stetige Abbildungen von X nach Y .

Reflexivität: $g_0 \sim g_0$ mit der Homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y \quad H(x, t) = g_0(x)$

Symmetrie: Sei $g_0 \sim g_1$ und $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ sei die Homotopie von g_0 nach g_1 . Betrachte $H' : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $H'(x, t) = H(x, 1 - t)$. Dann bildet H' eine Homotopie von g_1 nach g_0 und es folgt $g_1 \sim g_0$

Transitivität: Seien $g_0 \sim g_1$ und $g_1 \sim g_2$, H_0 die Homotopie von g_0 nach g_1 und H_1 die Homotopie von g_1 nach g_2 . Betrachte nun

$$H' : X \times [0, 1] \rightarrow Y \text{ mit } H'(x, t) = \begin{cases} H_0(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_1(x, 2t - 1) & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Da H' stetig ist (leicht nach zu rechnen) und es gilt, dass $H'(x, 0) = H_0(x, 0) = g_0(x)$ und $H'(x, 1) = H_1(x, 1) = g_2(x)$, ist H' Homotopie von g_0 nach g_2 und es folgt $g_0 \sim g_2$

□

Bemerkung 2.5. Da Kurven und Bögen stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind, können wir nun über Homotopieklassen von Kurven und Bögen sprechen.

Die Homotopieklassen werden wir im Folgenden mit a, b, c, \dots bezeichnen und Repräsentanten der entsprechenden Homotopieklasse mit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Definition 2.6. Seien a und b zwei Homotopieklassen von Kurven. Die *Schnittzahl* $i(a, b) \in \mathbb{N}_0$ ist wie folgt definiert:

$$i(a, b) = \min\{|\alpha \cap \beta| \mid \alpha \in a, \beta \in b\}$$

Wir sagen α und β sind in *minimaler Position*, wenn $|\alpha \cap \beta| = i(a, b)$.

Definition 2.7. Das *Geschlecht* g einer Fläche S ist definiert als die maximale Anzahl von Homotopieklassen einfacher, essentieller, nicht separierender Kurven, die paarweise Schnittzahl 0 haben.

2.1. Das Bigon-Kriterium

Definition 2.8. Seien α und β zwei einfache Kurven auf einer Fläche S , die sich mindestens zweimal schneiden. Seien $\alpha' \subset \alpha$, $\beta' \subset \beta$ zwei Teilbögen, die sich zwischen zwei Schnittpunkten befinden. Wenn $\alpha' \cup \beta'$ den Rand einer Kreisscheibe \mathbb{D} bildet, sagen wir α und β formen einen *Bigon*. Das heißt ein Bigon ist eine Kreisscheibe, deren Rand aus zwei Bögen besteht, die sich in zwei Punkten schneiden.

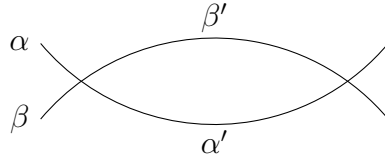


Abbildung 2.1: Ein Bigon

Lemma 2.9. *Seien α und β zwei sich schneidende, einfache Kurven auf einer Fläche S . Sei \tilde{S} die universelle Überlagerung von S und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ Lifts von α und β . Wenn α und β keinen Bigon formen, dann schneiden sich $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ nur höchstens einmal.*

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis an [14, S. 32]. Wir werden bei diesem Beweis nicht so sehr ins Detail gehen, da es sich hierbei nur um ein Hilfslemma für den nachfolgenden Satz handelt.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\chi(S) > 0$ Dann gilt also $2 - 2g - (b + n) > 0$, das heißt $2g + b + n < 2$. Wir müssen uns also nur folgende Flächen anschauen, $S = \mathbb{S}^2$, $S = S_{0,1}$, $S = S_{0,0,1}$. In allen drei Fällen gilt $\tilde{S} = S$, also genügt es zu zeigen, dass sich α und β höchstens einmal schneiden, wenn sie keinen Bigon formen. Für den Fall $S = \mathbb{S}^2$ gilt offensichtlich, dass α und β immer einen Bigon formen, wenn sie sich mehr als einmal schneiden (gilt $|\alpha \cap \beta| = 1$ ist der Schnittpunkt natürlich nur ein Berührungspunkt). Kommen wir nun zu den beiden anderen Fällen. Nehmen wir an, dass sich α und β mehr als einmal schneiden. Dann könnte es natürlich sein, dass die Randkomponente oder die Markierung der Fläche S zwischen zwei Schnittpunkten liegt und α und β an dieser Stelle keinen Bigon formen. Betrachten wir nun aber die andere Seite von α und β , sehen wir schnell ein, dass die beiden Kurven dort mindestens einen Bigon formen müssen.

$\chi(S) \leq 0$ Nach [15] gilt $\tilde{S} = \mathbb{R}^2$. Sei $p : \tilde{S} \rightarrow S$ die Überlagerungsabbildung. Wir nehmen an, dass sich $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ mindestens zweimal schneiden. Da $\tilde{S} = \mathbb{R}^2$ folgt, dass es eine Kreisscheibe \mathbb{D}_0 in \tilde{S} gibt, deren Rand aus einem Teilbogen von $\tilde{\alpha}$ und einem Teilbogen von $\tilde{\beta}$ besteht. Neben $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ gibt es natürlich noch unendlich viele weitere Lifts von α und β , das heißt, die Urbilder $p^{-1}(\alpha)$ und $p^{-1}(\beta)$ enthalten unendlich viele Elemente. Nun können wir uns die Menge der Schnittpunkte $(p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)) \cap D_0$ anschauen. Diese definieren wir uns als Ecken eines Graphen, dessen Kanten aus Teilbögen

der Lifts von $p^{-1}(\alpha), p^{-1}(\beta)$ und D_0 zwischen den Schnittpunkten bestehen. Dieser Graph ist aufgrund der Kompaktheit und der Transversalität endlich. Daraus folgt, dass es einen innersten Bigon D gibt. Ein innerster Bigon ist eine Kreisscheibe in \tilde{S} , deren Rand aus einem Teilbogen von $p^{-1}(\alpha)$, welchen wir mit $\tilde{\alpha}_1$ bezeichnen, und einem Teilbogen von $p^{-1}(\beta)$, welchen wir mit $\tilde{\beta}_1$ bezeichnen, besteht und durch deren Inneres keine Teilbögen von $p^{-1}(\alpha)$ und keine Teilbögen von $p^{-1}(\beta)$ verlaufen. Nun bezeichnen wir die Punkte, an denen sich $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\beta}_1$ berühren, mit v_1 und v_2 .

Als erstes wollen wir zeigen, dass die Einschränkung von p auf den Rand von D eine Einbettung ist. Zunächst sehen wir ein, dass v_1 und v_2 unter p auf zwei verschiedene Punkte in S abgebildet werden, da sich $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ an diesen beiden Punkten mit unterschiedlichen Orientierungen schneiden. Nehmen wir nun je ein Element auf $\tilde{\alpha}_1$ und auf $\tilde{\beta}_1$, und nehmen an, dass sie unter p auf das selbe Element in S geschickt werden, dann wären aber die beiden Elemente in \tilde{S} Schnittpunkte von $p^{-1}(\alpha)$ und $p^{-1}(\beta)$, was ein Widerspruch zu Annahme ist, dass es sich bei D um einen innersten Bigon handelt. Betrachten wir nun zwei Elemente auf dem Rand von D , wobei beide Elemente auf $\tilde{\alpha}_1$ oder beide auf $\tilde{\beta}_1$ seien und nehmen an, dass sie unter p auf das selbe Element in S geschickt werden. Dann gilt, dass es ein Element aus dem Lift von $p(v_1)$ gibt, welches zwischen den beiden anderen Elementen liegt. Dieses Element ist dann aber ein Schnittpunkt von $p^{-1}(\alpha)$ und $p^{-1}(\beta)$ und wir bekommen einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass D ein innerster Bigon ist. Damit haben wir also gezeigt, dass die Einschränkung von p auf den Rand von D tatsächlich eine Einbettung ist.

Im zweiten Schritt wollen wir einsehen, dass die Einschränkung von p auf D eine Einbettung ist, das heißt, wir zeigen, dass D auf eine eingebettete Kreisscheibe in S abgebildet wird. Seien x und y zwei Elemente aus D , welche unter p auf das selbe Element in S geschickt werden. Nun finden wir eine Decktransformation $\phi : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ mit $x = \phi(y)$. Eine Decktransformation einer Überlagerung $p : \tilde{S} \rightarrow S$ ist ein Homeomorphismus $\phi : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ für den gilt, $p \circ \phi = p$. Da wir oben gesehen hatten, dass der Rand von D unter p in S eingebettet wird, gilt entweder $\phi(\partial D) \cap \partial D = \partial D$, falls $\phi = id_{\tilde{S}}$ oder $\phi(\partial D) \cap \partial D = \emptyset$. Nun können wir den Jordanschen Kurvensatz anwenden, welcher besagt, dass jede einfache Kurve in \mathbb{R}^2 diesen Raum in zwei disjunkte Zusammenhangskomponenten zerlegt, deren gemeinsamer Rand die Kurve selbst ist. Mit Hilfe dieses Satzes folgt nun, dass entweder ϕ eine Selbstabbil-

dung von D ist oder ϕ^{-1} Selbsabbildung von $\phi(D)$. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz gilt, dass ϕ einen Fixpunkt hat. Da alle Decktransformationen ausgenommen der Identität fixpunktfrei sind, folgt, dass ϕ die Identität auf \tilde{S} sein muss. Somit folgt $x = y$ und wir sind fertig, da wir gezeigt haben, dass alle Elemente, welche unter p auf das selbe Element in S geschickt werden, schon gleich sein müssen.

□

Satz 2.10 (Bigon-Kriterium). *Zwei sich schneidende, einfache Kurven auf einer Fläche S sind genau dann in minimaler Position, wenn sie keinen Bigon formen.*

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis an [14, S. 30].

” \Rightarrow ” Seien α und β zwei Kurven auf S in minimaler Position. Wir nehmen an, sie würden einen Bigon formen. Dann können wir eine hinreichend kleine, abgeschlossene Umgebung dieses Bigons betrachten. Diese Umgebung ist offensichtlich homeomorph zu \mathbb{D} . Der Schnitt von $\alpha \cup \beta$ mit \mathbb{D} besteht dann aus zwei Teilbögen $\alpha' \subset \alpha$ und $\beta' \subset \beta$, welche sich in genau zwei Punkten schneiden (siehe Abbildung 2.1). Da die beiden Endpunkte von α' in \mathbb{D} auf der selben Seite von β' liegen, können wir α innerhalb von \mathbb{D} so homotopieren, dass sich α' und β' nicht mehr schneiden. Da wir α nur homotopiert haben, haben wir die Homotopieklasse von α nicht verlassen und es folgt, dass α und β nicht in minimaler Position waren. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass sich α und β in minimaler Position befinden.

” \Leftarrow ” Seien α und β zwei Kurven auf S , die nicht in minimaler Position sind. Wir zeigen nun, dass α und β dann einen Bigon formen. Da sich α und β nicht in minimaler Position befinden, finden wir eine Homotopie $H : \mathbb{S} \times [0, 1] \rightarrow S$ von α , welche die Schnittzahl mit β minimiert. Da sich α und β schneiden, schneiden sich auch β und H . Das Urbild von β , $H^{-1}(\beta) \subset \mathbb{S} \times [0, 1]$ besteht im Allgemeinen aus mehreren, disjunkten Zusammenhangskomponenten. Eine solche Zusammenhangskomponente ist entweder eine Kurve, ein Bogen, dessen Endpunkte auf der selben Randkomponente liegen, oder ein Bogen, der die beiden Randkomponenten miteinander verbindet. Da sich α und β mindestens zweimal schneiden und H die Schnittzahl minimiert, gibt es einen solchen Bogen δ in $H^{-1}(\beta) \subset \mathbb{S} \times [0, 1]$, dessen Endpunkte auf $\mathbb{S} \times \{0\}$ liegen. Sei δ' der Teilbogen von $\mathbb{S} \times \{0\}$, welcher zwischen den Endpunkten von δ liegt (siehe Abbildung 2.2). Dann ist $\delta \cup \delta'$ homeomorph zu \mathbb{D} in $\mathbb{S} \times [0, 1]$

(siehe Abbildung 2.2). Offensichtlich ist $H(\delta \cup \delta')$ eine nullhomotope Kurve in S , welche auf $\alpha \cup \beta$ liegt. Liften wir $H(\delta \cup \delta')$ auf die universelle Überlagerung von S , besitzt dieser Lift einen Teilbogen in einem Lift von α und einen Teilbogen in einem Lift von β . Da sich diese Lifts zweimal schneiden, formen α und β nach Lemma 2.9 einen Bigon. Damit folgt, dass zwei Kurven, welche nicht in minimaler Position sind, immer einen Bigon formen und somit folgt, dass zwei Kurven, welche keinen Bigon formen, schon in minimaler Position sein müssen.

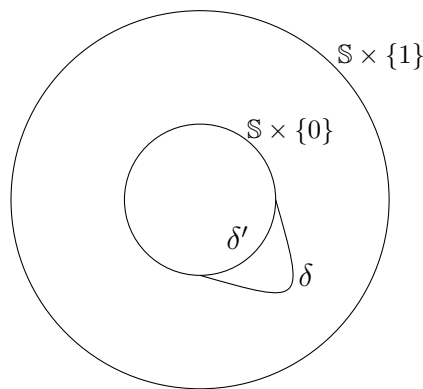


Abbildung 2.2: Die Kurven δ und δ' aus dem Beweis

□

Korollar 2.11. *Zwei einfache Kurven, die sich genau einmal schneiden, sind in minimaler Position.*

Beweis. Da sich die Kurven nur genau einmal schneiden, können sie keinen Bigon formen und müssen somit nach dem Bigon-Kriterium in minimaler Position sein.

□

Lemma 2.12. *Seien α und β zwei Kurven die sich genau einmal schneiden. Sei N eine hinreichend kleine Umgebung von $\alpha \cup \beta$. Dann ist N homeomorph zu $S_{1,1}$, das heißt, N lässt sich zu einem Torus mit genau einer Randkomponente verformen.*

Beweis. Wie in Abbildung 2.3 zu sehen, hat N genau eine Randkomponente. Außerdem ist die maximale Anzahl von Homotopieklassen einfacher, essentieller, nicht separierender Kurven, die paarweise Schnittzahl 0 haben, gleich 1 und somit ist das Geschlecht von N gleich 1. Da N offensichtlich keine Punktionen/Markierungen hat, gilt N ist homeomorph zu $S_{1,1}$. Abbildung 2.3 zeigt nur eine mögliche Position

von α und β , es könnte zum Beispiel auch sein, dass β nicht „durch“ α verläuft, sondern außerhalb. Aber man sieht schnell ein, dass die Umgebung von $\alpha \cup \beta$ immernur eine Randkomponente haben kann.

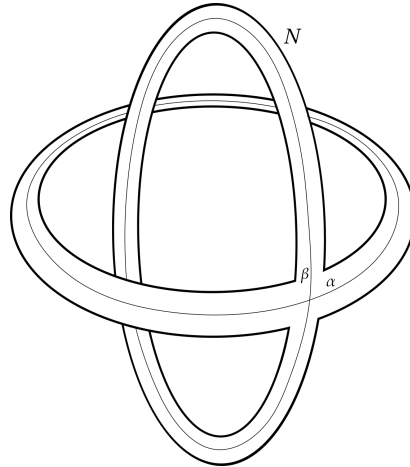


Abbildung 2.3: Die Umgebung von $\alpha \cup \beta$

□

Satz 2.13 (Klassifikation von Kurven). *Seien α und β zwei nichtseparierende Kurven auf einer Fläche S . Dann existiert ein Homeomorphismus $\phi : S \rightarrow S$ sodass $\phi(\alpha) = \beta$.*

Das heißt, bis auf Homeomorphie, gibt es genau eine nichtseparierende Kurve auf S .

Beweis. Für eine ausführlichere Argumentation siehe [14, Seite 37].

Bezeichne S_α und S_β die Flächen, die man erhält, wenn man die Fläche S entlang α beziehungsweise β aufschneidet (S_α und S_β sind zusammenhängend, da α beziehungsweise β nichtseparierend sind). Das heißt, S_α und S_β haben jeweils zwei Randkomponenten, welche zu α beziehungsweise β korrespondieren. Also haben S_α und S_β die selbe Anzahl an Randkomponenten und Markierungen. Außerdem stimmt die Euler-Charakteristik von S_α und S_β überein. Nach der Klassifikation von Flächen sind S_α und S_β homeomorph. Der Homeomorphismus von S_α nach S_β erweitert zu einem Homeomorphismus von S nach S , welcher α auf β schickt. □

3. Die Abbildungsklassengruppe

3.1. Definition und Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir uns die sogenannte Abbildungsklassengruppe genauer ansehen. Die formelle Definition der Abbildungsklassengruppe werden wir gleich formulieren. Anschaulich können wir sie uns als Symmetriegruppe von Flächen vorstellen. Solche Gruppen tauchen in der Mathematik immer wieder auf. Zum Beispiel ist die Symmetrische Gruppe Σ_n die Symmetriegruppe einer endlichen Menge $\{1, \dots, n\}$ und die Diedergruppe Δ_n die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n -gons.

Definition 3.1. Sei $S = S_{g,b,n}$ eine Fläche vom Geschlecht g , mit b Randkomponenten und n Markierungen. Bezeichne mit $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$ die Menge der orientierungserhaltenden Homeomorphismen, welche auf dem Rand von S mit der Identität übereinstimmen. Mit $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ bezeichnen wir die Untergruppe von $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$, deren Elemente homotop zur Identität sind.

Die *Abbildungsklassengruppe* ist dann definiert als

$$\text{MCG}(S) = \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \text{Homeo}_0(S, \partial S)$$

Ein Element aus $\text{MCG}(S)$ nennen wir *Abbildungsklasse*.

Das heißt also, wir betrachten die Menge der Homotopieklassen von orientierungserhaltenden Homeomorphismen einer Fläche auf sich selbst, wobei die Randkomponenten festgehalten werden. Im Gegensatz zu Randkomponenten können Markierungen permutiert werden. Im nächsten Satz werden wir einsehen, dass der Name „Abbildungsklassengruppe“ tatsächlich gerechtfertigt ist.

Satz 3.2. $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ bildet eine normale Untergruppe von $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$. Insbesondere bildet $\text{MCG}(S)$ also tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Homeomorphismen.

Beweis. $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ bildet eine Untergruppe, denn offensichtlich ist $\text{id}_S \in \text{Homeo}_0(S, \partial S)$ und für $f, g \in \text{Homeo}_0(S, \partial S)$ gilt $f \circ g^{-1}$ ist homeomorph zu $\text{id}_S \circ \text{id}_S^{-1} = \text{id}_S$, da f und g nach Definition von $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ homeomorph zu id_S sind. Somit gilt $f \circ g \in \text{Homeo}_0(S, \partial S)$. Also bildet $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ eine Untergruppe von $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ ein Normalteiler von $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$

ist. Dazu sei $f \in \text{Homeo}_0(S, \partial S)$ und $g \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$. Dann gilt, f ist homeomorph zu id_S und somit gilt, $g \circ f \circ g^{-1}$ ist homeomorph zu $g \circ id_S \circ g^{-1} = id_S$. Damit folgt $g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Homeo}_0(S, \partial S)$. Also bildet $\text{Homeo}_0(S, \partial S)$ eine normale Untergruppe von $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$. \square

Beispiel 3.3. In diesem Beispiel werden wir die Abbildungsklasse einiger Flächen berechnen. Die Begründungen und weitere Beispiele können in [14] nachgelesen werden.

(i) $MCG(\mathbb{D}) = \{id_{\mathbb{D}}\}$

Um das zu zeigen, benutzen wir den sogenannten Alexander Trick. Zunächst identifizieren wir \mathbb{D} mit dem Einheitskreis in \mathbb{R}^2 . Sei $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ein orientierungserhaltender Homeomorphismus, welcher auf dem Rand von \mathbb{D} mit der Identität übereinstimmt, das heißt, ϕ ist ein Element in $\text{Homeo}^+(\mathbb{D}, \partial\mathbb{D})$. Dann ist

$$H : \mathbb{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}, \quad (x, t) = \begin{cases} t \cdot \phi\left(\frac{x}{t}\right) & 0 \leq |x| \leq t \\ x & t < |x| \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen der Identität auf \mathbb{D} und ϕ , denn $H(x, 0) = id_{\mathbb{D}}(x)$ und $H(x, 1) = \phi(x)$ und dass H stetig ist, ist leicht nachzurechnen. Da wir ϕ beliebig gewählt hatten, folgt, dass jeder Homeomorphismus auf \mathbb{D} homotop zur Identität auf \mathbb{D} ist und somit gilt $MCG(\mathbb{D}) = \{id_{\mathbb{D}}\}$.

(ii) $MCG(\mathbb{S}^2) = \{id\}$

Sei $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ein orientierungserhaltender Homeomorphismus und α eine einfache Kurve in \mathbb{S}^2 . Da $\phi(\alpha)$ wieder eine einfache Kurve in \mathbb{S}^2 ist, müssen $\phi(\alpha)$ und α homotop sein, da auf \mathbb{S}^2 alle einfachen Kurven homotop sind. Also können wir annehmen, dass gilt $\phi(\alpha) = \alpha$. Es gilt nun also, dass $\phi(\alpha)$ auf α die Identität ist und auf den beiden entstandenen Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{S}^2 \setminus \alpha$ ein Homeomorphismus. Diese beiden Zusammenhangskomponenten bilden aber mit α als Rand jeweils eine Kreisscheibe. Nach dem obigen Beispiel ist die Abbildungsklasse dieser Kreisscheiben trivial und somit ist auch die Abbildungsklasse von \mathbb{S}^2 trivial.

(iii) $MCG(\mathbb{T}^2) = SL(2, \mathbb{Z})$

Die Begründung dafür kann in [14, Seite 53] nachgelesen werden.

3.2. Der Dehn-Twist

Definition 3.4. Sei S eine Fläche und α eine einfache Kurve auf S . Sei N eine Umgebung von α , dann finden wir einen orientierungserhaltenden Homeomorphismus $\phi : \mathbb{S} \times [0, 1] \rightarrow N$. Mit Hilfe dieses Homeomorphismus können wir nun N durch Koordinaten $(e^{i\theta}, t)$ mit $\theta \in [0, 2\pi]$ und $t \in [0, 1]$ parametrisieren. Dann finden wir einen Homeomorphismus

$$T_\alpha : S \rightarrow S \text{ mit } T_\alpha(x) = \begin{cases} x & x \in S \setminus N \\ e^{i(\theta+2\pi t)}, t & x = (e^{i\theta}, t) \in N \end{cases}$$

Da T_α für $t = 0$ und $t = 1$, also auf den Randkomponenten von $\mathbb{S} \times [0, 1]$ die Identität ist, ist T stetig.

T_α wird *Dehn-Twist* an der Kurve α genannt.

In der nachfolgenden Abbildung sehen wir, am Beispiel eines Torus, was ein Dehn-Twist an einer Kurve α , mit einer Kurve β macht, welche α in einem Punkt schneidet.

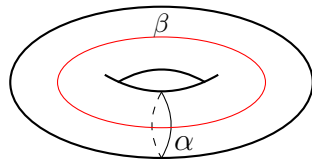


Abbildung 3.1: Zwei Kurven auf \mathbb{T}

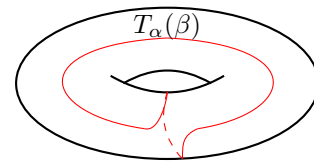
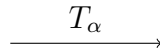


Abbildung 3.2: Die Kurve β nach dem Dehn-Twist T_α

Bemerkung 3.5. T_α hängt nicht nur von der Wahl von α , sondern auch von N und ϕ ab (als Element von $\text{Homeo}^+(S, \partial S)$ ist T_α also nicht wohldefiniert). Allerdings hängt T_α nur bis auf Homotopie von N und ϕ ab, das heißt, durch Ändern von N oder ϕ wird die Homotopieklasse von T_α nicht verlassen.

Deshalb verlassen wir die Homotopieklasse von T_α auch nicht, wenn wir einen Dehn-Twist an einer zu α homotopen Kurve durchführen. Sei a die Homotopieklasse von α , dann ist die Homotopieklasse T_a ein wohldefiniertes Element in $MCG(S)$.

Satz 3.6. *Seien a und b zwei Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven auf einer Fläche S und sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2$$

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis an [14, Seite 93].

Seien α und β Repräsentanten von a und b . Wir werden nun eine Kurve $\beta' \in T_a^k(b)$ konstruieren mit $|\beta \cap \beta'| = |k|i(a, b)^2$ und werden dann zeigen, dass β' und β sogar in minimaler Position sind.

Um β' zu konstruieren, homotopieren wir α und zwar $|k|i(a, b)$ mal, sodass auf der einen Seite von α , $|k|i(a, b)$ parallele Kopien von α entstehen. Außerdem homotopieren wir β auch einmal. Abbildung 3.3 zeigt den Fall $i(a, b) = 3$ und $k = 1$.

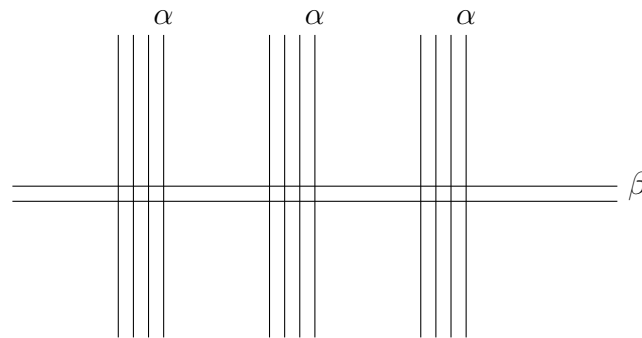


Abbildung 3.3: Kopien von α und β

Offensichtlich bildet die Vereinigung der Kopien von α und β keine einfache Kurve. Dazu müssen wir wie folgt vorgehen. Starten wir an einem Punkt auf der Homotopie von β , wir folgen so lange dieser Homotopie, bis wir zum ersten Schnittpunkt mit einer Kopie von α kommen, dann folgen wir dieser solange, bis wir $|k|i(a, b)$ mal die Kurve β geschnitten haben. Nun folgen wir der Kopie noch solange, bis wir zum nächsten Schnittpunkt mit der Homotopie von β gelangen und folgen dann dieser wieder bis zum nächsten Schnittpunkt mit einer Kopie von α . Das machen wir solange, bis wir wieder bei unserem Ausgangspunkt angekommen sind (siehe Abbildung 3.4). Dadurch erhalten wir eine einfache Kurve $\beta' \in T_a(b)$ mit $|\beta \cap \beta'| = |k|i(a, b)^2$.

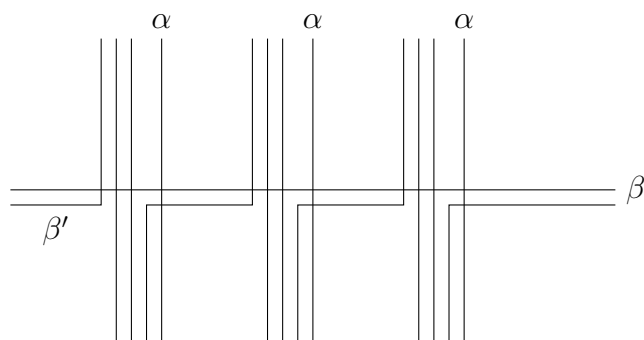


Abbildung 3.4: Die Kurve β'

Bleibt also noch zu zeigen, dass β und β' in minimaler Position sind. Nach dem Bigon-Kriterium genügt es zu zeigen, dass die beiden Kurven keinen Bigon formen. Seien $\beta_1, \dots, \beta_{|k|i(a,b)^2}$ und $\beta'_1, \dots, \beta'_{|k|i(a,b)^2}$ die Teilbögen von β beziehungsweise β' , die zwischen den Schnittpunkten liegen. Nehmen wir uns zwei Teilbögen β_i und β'_j , welche sich zweimal schneiden. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, entweder die Schnittpunkte haben den selben Index oder unterschiedlichen Index. Im ersten Fall können sie keinen Bigon formen, da der Index der beiden Schnittpunkte bei einem Bigon immer gleich sein muss. Würden β_i und β'_j im zweiten Fall einen Bigon formen, würde sofort folgen, dass α und β nicht in minimaler Position liegen können, dies wäre ein Widerspruch zu unserer Anfangsannahme. Also sind β und β' in minimaler Position. \square

Korollar 3.7. *Dehn-Twists haben unendliche Ordnung.*

Satz 3.8. *Seien a und b Homotopieklassen einfacher Kurven. Dann gilt*

$$T_a = T_b \Leftrightarrow a = b$$

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis an [14, Seite 93].

Da wir die Rückrichtung in der Bemerkung 3.5 schon behandelt haben, müssen wir nur noch die Hinrichtung zeigen.

Wir nehmen an, dass $a \neq b$ und zeigen, dass dann $T_a \neq T_b$. Zunächst suchen wir eine Homotopieklasse c einfacher Kurven mit $i(a, c) = 0$ und $i(b, c) \neq 0$ und zeigen dann, dass $T_a(c) \neq T_b(c)$. Dazu müssen wir zwei Fälle unterscheiden

- $i(a, b) \neq 0$, dann können wir $c = a$ wählen.
- $i(a, b) = 0$, dann finden wir nach Satz 2.13 ein solches c .

Nun erhalten wir mit Hilfe von Satz 3.6

$$i(T_a(c), c) = i(a, c)^2 = 0 \neq i(b, c)^2 = i(T_b(c), c)$$

Also gilt $T_a(c) \neq T_b(c)$ und somit auch $T_a \neq T_b$ □

Satz 3.9. *Seien a und b Homotopieklassen einfacher Kurven. Dann gilt*

$$i(a, b) = 0 \Leftrightarrow T_a(b) = b$$

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis an [14, Seite 93].

Seien α und β Repräsentanten von a und b in minimaler Position. Da sich α und β nicht schneiden, finden wir eine Umgebung von α , welche disjunkt von β ist. Also hält der Dehn-Twist an α die Kurve β fest.

Gelte nun also $T_a(b) = b$, dann gilt $i(T_a(b), b) = 0$. Nach Satz 3.6 gilt $i(T_a(b), b) = i(a, b)^2$ und es folgt $i(a, b) = 0$. □

4. Der Kurvengraph

Nachdem wir uns jetzt ein wenig mit Flächen und Kurven auf Flächen beschäftigt haben, sind wir nun in der Lage den sogenannten *Kurvengraphen* zu definieren. Wir werden uns nur mit dem Kurvengraph von kompakten, zusammenhängenden und orientierbaren Flächen beschäftigen. Also sei in diesem Abschnitt eine Fläche S immer kompakt, zusammenhängend und orientierbar.

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition des Kurvengraphen

Definition 4.1. Sei S eine Fläche. Der *Kurvengraph* $\mathcal{C}(S)$ einer Fläche S ist ein Graph, dessen Ecken Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven auf S sind. Zwei Ecken a und b sind genau dann mit einer Kante verbunden, wenn $i(a, b) = 0$, das heißt, wenn es Repräsentanten von a und b gibt, welche disjunkt sind.

Der Kurvengraph ist also über Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven definiert. Wie wir gesehen haben, ist eine nicht essentielle Kurve, die nicht nullhomotop ist, entweder homotop zu einer Randkomponente oder homotop zu einer Markierung. Das heißt, der Kurvengraph einer Fläche mit b Randkomponenten und n Markierungen stimmt dem Kurvengraph einer Fläche mit $b + n$ Randkomponenten oder mit $b + n$ Markierungen überein. Aus diesem Grund können wir in diesem Abschnitt Randkomponenten und Markierungen als gleich auffassen. Wir werden im Folgenden also über Flächen $S_{g,b}$ vom Geschlecht g mit b Randkomponenten sprechen, wobei eine Randkomponente auch eine Markierung sein könnte. Bevor wir uns einigen Eigenschaften des Kurvengraphen zuwenden, schauen wir uns den Kurvengraph einiger Spezialfälle von Flächen an.

Bemerkung 4.2. Für die Flächen $S_{0,0} = \mathbb{S}^2$, $S_{0,1}$, $S_{0,2}$, $S_{0,3}$ ist der Kurvengraph leer, das heißt, die Eckenmenge ist leer. Das liegt daran, dass es auf diesen vier Flächen keine einfachen, essentiellen Kurven gibt. In den Fällen \mathbb{S}^2 und $S_{0,1}$ ist jede einfache Kurve nullhomotop und kann somit nicht essentiell sein. In den beiden anderen Fällen ist jede einfache Kurve homotop zu einer Randkomponente und kann somit ebenfalls nicht essentiell sein.

Bei den Flächen $S_{0,4}$, $S_{1,0} = \mathbb{T}^2$, $S_{1,1}$ besteht der Kurvengraph nur aus unendlich vielen, disjunkten Ecken, da sich auf \mathbb{T}^2 und $S_{1,1}$ je zwei nicht homotope, einfache, essentielle Kurven mindestens einmal schneiden und auf $S_{0,4}$ sogar mindestens zweimal. In diesen Fällen werden zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die Homotopieklassen Repräsentanten haben, welche sich genau einmal beziehungsweise genau zweimal schneiden.

Auf diese Spezialfälle werden wir allerdings nicht genauer eingehen und im Folgenden immer nur den Kurvengraph von Flächen mit $3g + b \geq 5$ betrachten.

Satz 4.3. *Sei $S = S_{g,b}$ eine Fläche vom Geschlecht g mit b Randkomponenten. Wenn $3g + b \geq 5$, dann ist $\mathcal{C}(S)$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis an [14, S. 93].

Seien a, b Ecken in $\mathcal{C}(S)$. Das heißt, a, b sind Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven auf S . Um zu zeigen, dass $\mathcal{C}(S)$ zusammenhängend ist, brauchen wir eine Folge $a = c_1, \dots, c_k = b$ von Ecken in $\mathcal{C}(S)$, mit $i(c_i, c_{i+1}) = 0$ für alle $i = 1, \dots, k - 1$. Wir führen also eine Induktion über $i(a, b)$ durch.

$i(a, b) = 0$, dann sind a und b nach Definition von $\mathcal{C}(S)$ miteinander verbunden.

$i(a, b) = 1$. Seien $\alpha \in a$ und $\beta \in b$ Repräsentanten, welche sich genau einmal schneiden. Betrachten wir eine hinreichend kleine Umgebung von $\alpha \cup \beta$, dann ist diese nach Lemma 2.12 homeomorph zum Torus mit genau einer Randkomponente, welche wir mit γ bezeichnen. Sei c die Homotopieklassse von γ .

Offensichtlich ist γ einfach, bleibt also noch zu zeigen, dass γ auch essentiell ist.

Angenommen γ wäre nicht essentiell, dann gilt entweder

- (i) γ homotop zu einer Randkomponente von S , dann folgt aber sofort, dass $S = S_{1,1}$, und damit ein Widerspruch zu $3g + b \geq 5$

oder

- (ii) γ nullhomotop in S , dann folgt, dass $S = S_{1,0}$, und wieder ein Widerspruch zu $3g + b \geq 5$.

Somit ist γ eine einfache essentielle Kurve und c bildet eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$.

Außerdem gilt $i(a, c) = 0 = i(b, c)$. Also sind sowohl a als auch b mit c durch eine Kante verbunden und es folgt, dass a und b durch einen Pfad verbunden sind.

$i(a, b) \geq 2$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass für alle Ecken $c, d \in \mathcal{C}(s)$ mit $i(c, d) < i(a, b)$ ein Pfad zwischen c und d existiert.

Seien $\alpha \in a$ und $\beta \in b$ zwei Repräsentanten mit $|\alpha \cap \beta| = i(a, b)$ und x, y zwei Schnittpunkte von α und β , sodass auf β kein weiterer Schnittpunkt zwischen x und y liegt. Bezeichne β_1 den Teilbogen von β mit $\partial\beta_1 = \{x, y\}$, der zwischen x und y liegt. Wir orientieren nun α und β , sodass es Sinn macht über den Index der Schnittpunkte zu reden. Nun gibt es zwei Fälle.

Fall 1: x und y haben den selben Index. Sei α_1 ein Teilbogen von α , mit $\partial\alpha_1 = \{x, y\}$. Betrachte nun die Kurve $\gamma = \alpha_1 \cup \beta_1$. Sei c die Homotopieklasse von γ . Durch homotopieren von γ zu γ' (siehe Abbildung 4.1) erreichen wir, $i(a, c) = 1$ und $i(b, c) < i(a, b)$, wobei γ' ein Repräsentant von c in minimaler Position ist. Da $|\alpha \cap \gamma| = 1$, folgt, dass γ' essentiell ist. Denn wäre γ' homotop zu einer Randkomponente oder nullhomotop, könnten wir α homotopieren, sodass sich die beiden Kurven nicht mehr schneiden. Da γ' offensichtlich einfach ist, bildet c eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ und es gilt $i(a, c) < i(a, b)$ und $i(b, c) < i(a, b)$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt, dass es einen Pfad zwischen a und c und einen Pfad zwischen b und c gibt. Also auch einen zwischen a und b .

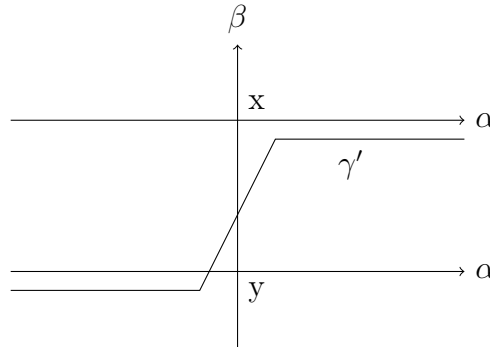


Abbildung 4.1: Die Kurve γ'

Fall 2: x und y haben unterschiedlichen Index. Seien α_1 und α_2 Teilbögen von α mit $|\alpha_1 \cap \alpha_2| = \{x, y\}$ und $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$. Betrachte nun die beiden Kurven $\gamma_1 = \alpha_1 \cup \beta_1$ und $\gamma_2 = \alpha_2 \cup \beta_1$. Die Kurven γ_1 und γ_2 können nicht nullhomotop sein, da α und β in diesem Fall einen Bigon bilden müssten. Da α und β aber in minimaler Position liegen, können sie nach dem Bigon-Kriterium, Satz 2.10, keinen Bigon formen. Es kann allerdings sein, dass eine oder beide Kurven homotop zu einer Randkomponente sind. Ist eine von beiden nicht homotop zu einer Randkomponente, ist sie essentiell und ihre Homotopieklasse c bildet eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$. Wir finden dann eine Kurve in c , sodass $i(a, c) = 0$ und $i(b, c) < i(a, b)$. Anschaulich ziehen wir γ_1 beziehungsweise γ_2 zusammen und erhalten homotope Kurven γ'_1 und γ'_2 mit den geforderten Eigenschaften (siehe Abbildung 4.2).

Seien nun also γ_1 und γ_2 homotop zu einer Randkomponente. Dann bildet α den Rand einer Kreisscheibe mit zwei zusätzlichen Randkomponenten, welche homotop zu γ_1 beziehungsweise γ_2 sind. Sei β_2 der andere Teilbogen von

β , mit $\beta_2 \cap \beta_1 = \{x, y\}$ und $\beta_2 \cup \beta_1 = \beta$. Wir betrachten nun zwei Kurven $\gamma_3 = \alpha_1 \cup \beta_2$ und $\gamma_4 = \alpha_2 \cup \beta_2$. Diese können, nach der selben Argumentation wie für γ_1 und γ_2 , nicht nullhomotop sein. Ist eine der beiden Kurven essentiell, homotopieren wir sie zu γ'_3 beziehungsweise γ'_4 auf die selbe Weise wie bei γ_1 beziehungsweise γ_2 (siehe Abbildung 4.3). Wir erhalten so eine einfache, essentielle Kurve, deren Homotopieklasse c eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ bildet mit der Eigenschaft $i(a, c) < i(a, b)$ und $i(b, c) = 0$. Sind γ_1 und γ_2 nicht essentiell, ist jede der beiden Kurven homotop zu je einer Randkomponente. Das bedeutet allerdings, dass α wieder den Rand einer Kreisscheibe mit zwei zusätzlichen Randkomponenten bildet, diesmal aber auf der anderen Seite von α . Daraus folgt direkt, dass $S = S_{0,4}$ im Widerspruch zu $3g + b \geq 5$.

Somit haben wir alle möglichen Fälle betrachtet und jedesmal eine Homotopieklasse gefunden, welche in $\mathcal{C}(S)$ mit a und b verbunden ist, und haben somit einen Pfad von a nach b gefunden.

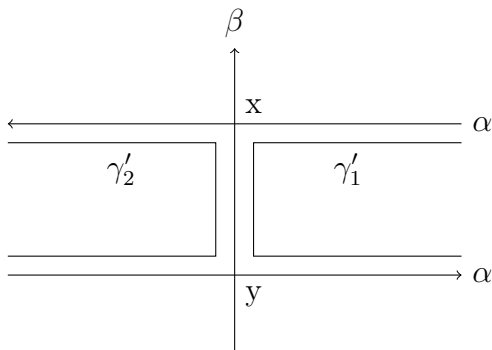


Abbildung 4.2: Die Kurven γ'_1 und γ'_2

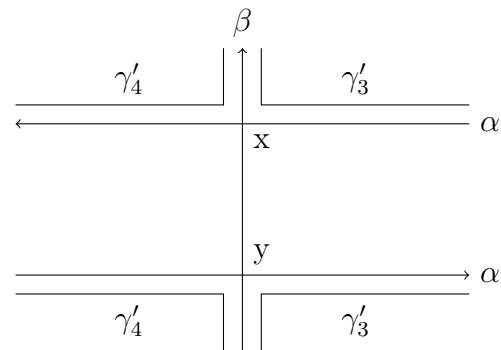


Abbildung 4.3: Die Kurven γ'_3 und γ'_4

□

Da wir uns im nächsten Kapitel mit der Hyperbolizität des Kurvengraphen beschäftigen wollen, ist dieser Satz extrem wichtig. Um über Hyperbolizität eines Graphen zu sprechen, müssen wir natürlich erst einmal einsehen, dass der Graph tatsächlich zusammenhängend ist.

Im nächsten Satz werden wir, mit Hilfe von Dehn-Twists, zeigen, dass der Kurvengraph lokal unendlich ist. Ein Graph heißt lokal unendlich, wenn an jeder Ecke unendlich viele Kanten abgehen. Für den Fall des Kurvengraphen bedeutet das, dass es für jede Homotopieklasse a einfacher, essentieller Kurven, unendlich viele Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven gibt, welche nicht mit a übereinstimmen. Also für jede einfache, essentielle Kurve α , auf einer Fläche S , finden wir unendlich viele, nicht homotope, einfache, essentielle Kurven, welche sich nicht mit α schneiden.

Satz 4.4. $\mathcal{C}(S)$ ist lokal unendlich.

Beweis. Seien a, b, c Ecken in $\mathcal{C}(S)$ mit $i(a, b) = 0$, $i(a, c) = 0$ und $i(b, c) > 0$. Es gilt, dass $T_b^k(c)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ bildet. Diese sind paarweise verschieden, da $i(b, c) > 0$. Da $i(a, b) = 0$ finden wir Repräsentanten $\alpha \in a$ und $\beta \in b$, welche sich nicht schneiden. Außerdem können wir β so wählen, dass wir eine Umgebung von β finden welche ebenfalls disjunkt zu α ist. Sei $T_\beta \in T_b$ ein geeigneter Dehn-Twist, so entspricht dieser außerhalb dieser Umgebung gerade der Identität, das heißt, er hält α fest. Betrachten wir nun $T_\beta(\gamma)$, wobei γ ein Repräsentant von c sei, welcher mit α und β in minimaler Position ist (insbesondere also disjunkt von α), so gilt, dass $T_\beta(\gamma)$ außerhalb der Umgebung mit γ übereinstimmt. Das heißt, außerhalb der Umgebung sind $T_\beta(\gamma)$ und α disjunkt, und da α und die Umgebung ebenfalls disjunkt sind, folgt, dass sich $T_\beta(\gamma)$ und α nicht schneiden. Somit gilt für die Homotopieklassen $i(T_b(c), a) = 0$. Durch iteriertes Anwenden erhalten wir $i(T_b^k(c), a) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Das heißt, für jedes $k \in \mathbb{Z}$ finden wir eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$, welche mit α durch eine Kante verbunden ist. \square

5. Die Hyperbolizität des Kurvengraphen

Wie im letzten Abschnitt werden wir nur Flächen mit $3g + b \geq 5$ betrachten und können wieder Randkomponenten und Markierungen als gleich auffassen. Außerdem seien wieder alle Flächen, die wir behandeln, kompakt, zusammenhängend und orientierbar.

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Hyperbolizität des Kurvengraphen beschäftigen. Bevor wir uns aber dem Kurvengraph zuwenden, müssen wir einen Umweg über den *Bogengraph* $\mathcal{A}(S)$ einer kompakten, zusammenhängenden, orientierbaren Fläche gehen. Dieser Graph hat als Eckenmenge die Menge der Homotopieklassen einfacher, essentieller Bögen, wobei die Randpunkte der Bögen, welche wir betrachten, auf Randkomponenten von S liegen müssen. Zwei Ecken von $\mathcal{A}(S)$ sind genau dann, durch eine Kante, verbunden, wenn es Repräsentanten gibt, die disjunkt sind.

Sowohl der Kurvengraph als auch der Bogengraph sind induzierte Teilgraphen des sogenannten *Bogen und Kurvengraphen*, $\mathcal{AC}(S)$, dessen Eckenmenge aus Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven und einfacher, essentieller Bögen besteht, wobei die Randpunkte der Bögen wieder auf Randkomponenten von S liegen müssen. Der Graph $\mathcal{AC}(S)$ unterscheidet sich also nur für Flächen mit Rand von $\mathcal{C}(S)$. Im folgenden betrachten wir nur Bögen, deren Randpunkte auf Randkomponenten von S liegen. Für zwei Ecken a und b in $\mathcal{AC}(S)$ werden wir mit $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)}$ den Abstand, das heißt die Länge des kürzesten Pfades bezeichnen. Analog sei $|a, b|_{\mathcal{A}(S)}$ der Abstand im Bogengraph und $|a, b|_{\mathcal{C}(S)}$ der Abstand im Kurvengraph.

Bevor wir mit unserer Arbeit beginnen können, sollten wir uns noch kurz mit dem Bigon-Kriterium für Bögen beschäftigen. Genau wie für Kurven können wir auch die Schnittzahl von Homotopieklassen einfacher, essentieller Bögen definieren. Wir sagen, dass zwei Bögen in minimaler Position sind, wenn die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit der Schnittzahl ihrer Homotopieklassen übereinstimmt. Das Bigon-Kriterium für Bögen formuliert sich dann wie folgt.

Satz 5.1 (Bigon-Kriterium für Bögen). *Seien α und β zwei einfache, essentielle Bögen auf einer Fläche S . Dann gilt:*

α und β sind in minimaler Position $\Leftrightarrow \alpha$ und β formen keinen Bigon und keinen Halbbigon,

wobei ein Halbbigon eine abgeschlossene Kreisscheibe ist, deren Rand aus je einem Teilbogen der beiden Bögen α und β und einem Teilbogen einer Randkomponente von S besteht

5.1. Eineckbögen, Eineckpfade und die Hyperbolizität des Bogengraphen

Im Folgenden werden wir uns an [7] orientieren.

Wie schon gesagt müssen wir, bevor wir über die Hyperbolizität des Kurvengraphen sprechen können, einen Umweg über den Bogengraph gehen. Wir werden zunächst zeigen, dass $\mathcal{A}(S)$ 7-hyperbolisch ist. Um dies zu zeigen, müssen wir für jedes geodätische Dreieck zeigen, dass es eine Ecke in $\mathcal{A}(S)$ gibt, welche höchstens Abstand 7 zu den drei Seiten des Dreiecks hat. Dazu, werden wir zunächst Pfade konstruieren, welche „nahe“ an Geodäten liegen. Mit Hilfe dieser Pfade, werden wir dann zeigen können, dass der Bogengraph 7-hyperbolisch ist. Da Pfade in $\mathcal{A}(S)$ aus einer Folge von Ecken bestehen, wobei aufeinanderfolgende Ecken durch eine Kante verbunden sind und die Ecken Homotopieklassen einfacher, essentieller Bögen sind, werden wir zunächst Bögen konstruieren, welche als Repräsentanten für die Homotopieklassen dienen.

Definition 5.2. Seien α und β zwei Bögen in minimaler Position auf einer Fläche S . Seien x_α und x_β Endpunkte von α beziehungsweise β und sei z ein Schnittpunkt von α und β . Seien $\alpha' \subset \alpha$ und $\beta' \subset \beta$ Teilbögen mit $\partial\alpha' = \{x_\alpha, z\}$ und $\partial\beta' = \{x_\beta, z\}$. Wenn $\alpha' \cup \beta'$ ein einfacher Bogen ist, nennen wir diesen einen *Eineckbogen* zwischen x_α und x_β .

Bemerkung 5.3. Ein Eineckbogen ist eindeutig bestimmt durch z . Da α und β in minimaler Position sind, ist jeder Eineckbogen, der sich aus Teilbögen von α und β zusammensetzt, essentiell. Natürlich definiert nicht jeder Schnittpunkt von α und β einen Eineckbogen. Zum Beispiel sieht man in Abbildung 5.1, dass z_5 einen Eineckbogen definiert, z_6 jedoch nicht, da sich der Bogen dann selber schneiden würde und somit nicht mehr einfach wäre. Auch die Schnittpunkte z_1, \dots, z_4 definieren Eineckbögen.

Wir haben Eineckbögen definiert als Vereinigung zweier geeigneter Teilbögen von zwei Kurven. Streng genommen ist der rote Bogen in Abbildung 5.1 also kein Eineckbogen, welcher von α und β abstammt. Aber er liegt in der selben Homotopieklasse. Andererseits könnte man auch α und β so homotopieren, dass der Eineckbogen (rot) mit je einem Teilbogen der homotopierten Bögen von α und β übereinstimmt. Dies zeigt, dass wir die Homotopieklasse eines Eineckbogens nicht verlassen, wenn wir einen Eineckbogen betrachten, welcher von Kurven α' , homotop zu α und β' , homotop zu β abstammt. Das heißt, die Homotopieklasse eines Eineckbogens ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten α und β .

Definition 5.5. Seien α und β zwei Bögen in minimaler Position auf einer Fläche S und x_α, x_β Endpunkte. Bezeichne $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ die geordnete Menge der Eineckbögen mit Randpunkten x_α und x_β . Die Folge $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta}) = (\alpha = \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n = \beta)$ heißt *Eineckpfad* zwischen α^{x_α} und β^{x_β} .

Da ein Eineckpfad aus einer Folge nicht homotoper, einfacher essentieller Bögen besteht, bilden die Homotopieklassen dieser Bögen paarweise verschiedene Ecken in $\mathcal{A}(S)$. Wir werden im Folgenden zwei Eineckpfade, deren Folgenglieder zwar homotop, aber nicht zwangsläufig gleich sind, als identisch ansehen, da wir uns eigentlich nur für die Homotopieklassen (also die Ecken in $\mathcal{A}(S)$) interessieren. Im nächsten Satz werden wir sehen, dass der Begriff „Eineckpfad“ tatsächlich gerechtfertigt ist.

Satz 5.6. Seien α und β zwei Bögen in minimaler Position auf einer Fläche S und x_α, x_β wieder zwei Endpunkte. Sei $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta}) = (\alpha = \gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n = \beta)$ der Eineckpfad. Seien c_i die Homotopieklassen von γ_i für alle $i = 0, \dots, n$. Dann gilt $i(c_i, c_{i+1}) = 0$ für alle $i = 0, \dots, n$. Das heißt, die Homotopieklassen aufeinanderfolgender Bögen eines Eineckpfades sind in $\mathcal{A}(S)$ durch eine Kante verbunden.

Beweis. Zunächst einmal wollen wir einsehen, dass $i(c_0, c_1) = 0 = i(c_{n-1}, c_n)$ gilt. Es gilt $\gamma_0 = \alpha$ und γ_1 besteht aus einem Teilbogen von α und einem Teilbogen von β , welche wir mit α' und β' bezeichnen, also $\gamma_1 = \alpha' \cup \beta'$. Sei π der Schnittpunkt von α und β , welcher γ_1 definiert. Da wir γ_1 betrachten, gilt, dass sich β' und α außer in π nicht schneiden dürfen, also ist dieser Teil von γ_1 disjunkt von $\gamma_0 = \alpha$. Nun können wir α' so von α weg homotopieren, dass sie sich nicht mehr schneidet (ähnlich wie bei dem Beweis zu Satz 4.3) und erhalten einen zu γ_1 homotopen, von α disjunkten Bogen. Also gilt $i(c_0, c_1) = 0$. Ein analoges Argument liefert $i(c_{n-1}, c_n) = 0$.

Seien nun $\gamma_i = \alpha' \cup \beta'$ und $\gamma_{i+1} = \alpha'' \cup \beta''$. Per Definition sind α' und α'' Teilbögen von α , welche einen gemeinsamen Randpunkt, x_α , haben. Der andere Randpunkt von α' ist ein geeigneter Schnittpunkt von α und β , welchen wir mit π bezeichnen. Den zweiten Randpunkt von α'' bezeichnen wir mit π' . Es gilt, dass π' nach π der erste Schnittpunkt (wenn wir bei x_α starten) von α mit β ist, der einen Eineckbogen definiert (da wir zwei aufeinanderfolgende Eineckbögen betrachten). Insbesondere liegt π' auf β' . In dem Bereich zwischen π und π' sind γ_i und γ_{i+1} bereits disjunkt, denn würden sie sich dort schneiden, würde dieser Schnittpunkt, per Definition der Ordnung, einen Eineckbogen definieren, welcher zwischen γ_i und

γ_{i+1} liegt. Außerhalb der Punkte π beziehungsweise π' folgen γ_i beziehungsweise γ_{i+1} nur noch α und β . In diesen Bereichen sind γ_i und γ_{i+1} homotop und können deshalb in diesen Bereichen so homotopiert werden, dass sie sich nicht schneiden. Somit gilt für die Homotopieklassen c_i und c_{i+1} von γ_i und γ_{i+1} , dass $i(c_i, c_{i+1}) = 0$. In Abbildung 5.2 schneiden sich α und β sechsmal. Von diesen sechs Schnittpunkten definieren die Schnittpunkte z_1, \dots, z_5 Eineckbögen, aber z_6 nicht. Wir haben in der Abbildung zwei aufeinanderfolgende schon homotopierte Eineckbögen eingezeichnet, um zu verdeutlichen, wie man die beiden unhomotopierten Eineckbögen homotopieren muss, damit sie sich nicht schneiden. Der Eineckpfad $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$ besteht, in diesem Beispiel, aus sieben Folgengliedern $\alpha = \gamma_0, \dots, \gamma_6 = \beta$, wobei wir nur γ_1 (rot) und γ_2 (grün) eingezeichnet haben (streng genommen haben wir nur zu γ_4 beziehungsweise γ_5 homotope Bögen eingezeichnet). Wie man sieht, schneiden sich $\alpha = \gamma_0$ und γ_1 nicht und auch γ_1 und γ_2 schneiden sich nicht.

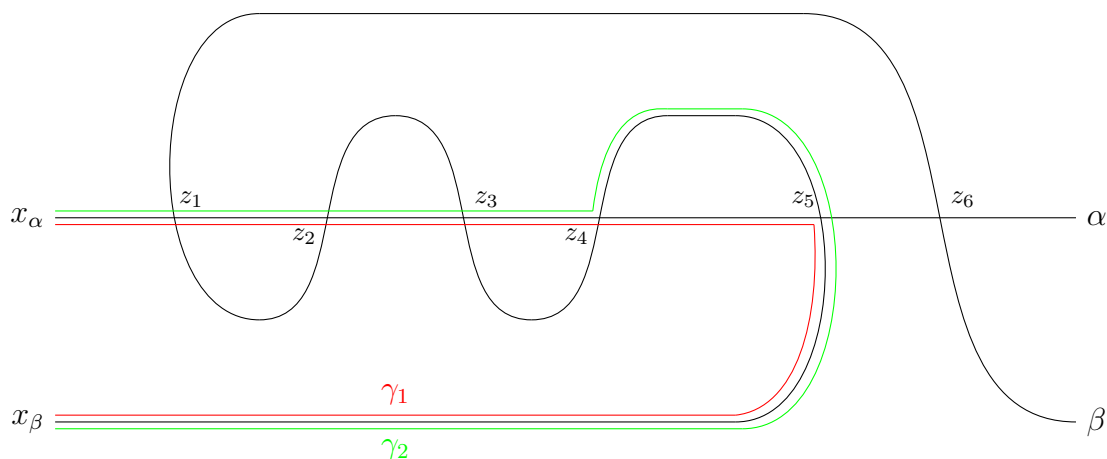


Abbildung 5.2: Zwei aufeinanderfolgende, homotopierte Eineckbögen, welche sich nicht schneiden

□

Korollar 5.7. *Der Graph $\mathcal{A}(S)$ ist für jede kompakte, zusammenhängende und orientierbare Fläche S zusammenhängend.*

Lemma 5.8. *Seien α, β, δ drei Bögen, paarweise in minimaler Position und seien $x_\alpha, x_\beta, x_\delta$ Endpunkte der entsprechenden Bögen. Dann gilt, für alle $\gamma \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$ existiert ein $\gamma^* \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta}) \cup \mathcal{P}(\delta^{x_\delta}, \beta^{x_\beta})$, sodass für die Homotopieklassen c und c^* von γ beziehungsweise γ^* gilt, $i(c, c^*) = 0$.*

Das heißt, als Ecken in $\mathcal{A}(S)$ sind sie durch eine Kante verbunden.

Beweis. Sei $\gamma = \alpha' \cup \beta'$ ein Eineckbogen in $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$. Sind γ und δ disjunkt, so wählen wir $\gamma^* = \delta \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta}) \cup \mathcal{P}(\delta^{x_\delta}, \beta^{x_\beta})$ und sind fertig. Anderenfalls sei δ' der Teilbogen von δ , dessen Inneres disjunkt von γ ist und dessen einer Randpunkt x_δ ist und dessen anderer Randpunkt der erster Schnittpunkt von δ mit γ ist (erster Schnittpunkt, wenn wir bei x_δ starten). Diesen zweiten Randpunkt, also den Punkt, an dem sich γ und δ' berühren, nennen wir y . Da $y \in \gamma$ und $\gamma = \alpha' \cup \beta'$ ist, muss einer der Teilbögen von γ , der entsteht, wenn wir γ an y , trennen in α' oder in β' enthalten sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass dieser Teilbogen in α' enthalten ist und ihn mit α'' bezeichnen. Nach Konstruktion sind die beiden Randpunkte von α'' gerade y und x_α . Nach Konstruktion von δ' schneiden sich α'' und δ' außer in y nicht und somit ist der Bogen $\alpha'' \cup \delta'$ ein Eineckbogen und enthalten in $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta})$. Um nun einzusehen, dass er auch in der selben Homotopieklasse wie unser gesuchtes γ^* liegt, müssen wir $\alpha'' \cup \delta'$ so homotopieren, dass er sich nicht mehr mit γ schneidet. Da δ' nach Konstruktion schon disjunkt von γ ist und α'' mit einem Teilbogen von γ übereinstimmt, können wir α'' von α' weg homotopieren, sodass sich γ und $\alpha'' \cup \delta'$ nicht mehr schneiden und sind damit fertig. \square

Die drei Eineckpfade aus Lemma 5.8 bilden in $\mathcal{A}(S)$ ein Dreieck, wobei jeweils ein Eineckpfad eine Seite des Dreiecks bildet. Die Aussage des Satzes bedeutet nichts anderes, als dass dieses Dreieck 1-dünn ist. Das heißt, jeweils eine Seite des Dreiecks liegt in der Vereinigung von Umgebungen mit Radius 1 der beiden anderen Seiten.

Lemma 5.9. *Seien α, β, δ drei Bögen, paarweise in minimaler Position und seien $x_\alpha, x_\beta, x_\delta$ Endpunkte der entsprechenden Bögen. Dann gibt es $\gamma_1 \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$, $\gamma_2 \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta})$ und $\gamma_3 \in \mathcal{P}(\delta^{x_\delta}, \beta^{x_\beta})$, sodass für die entsprechenden Homotopieklassen c_1, c_2, c_3 gilt $i(c_i, c_j) = 0$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$.*

Beweis. Sind alle drei Bögen α, β, δ disjunkt, sind wir offensichtlich fertig.

Seien nun zwei der drei Bögen α, β, δ disjunkt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass α und δ disjunkt sind. Nun müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Entweder liegt der erste Schnittpunkt von β mit einem der anderen Bögen (welcher immer einen Eineckbogen definiert) auf α oder auf δ .

Liegt dieser Schnittpunkt auf α , so wählen wir $\gamma_2 = \alpha \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta})$ und $\gamma_3 = \delta \in \mathcal{P}(\delta^{x_\delta}, \beta^{x_\beta})$. Als γ_1 setzten wir den Eineckpfad aus $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$, welcher zwischen x_β und x_α verläuft und über den eben erwähnten ersten Schnittpunkt nach x_β eindeutig bestimmt ist. Nach Voraussetzung sind γ_2 und γ_3 schon disjunkt. Durch

die Wahl des Schnittpunktes folgt auch sofort, dass γ_3 und γ_1 disjunkt sind. Durch homotopieren von γ_1 erreichen wir außerdem, dass der homotopierte Bogen disjunkt zu γ_2 ist.

Im zweiten Fall wählen wir $\gamma_1 = \alpha \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$ und $\gamma_2 = \delta \in \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta})$. Als γ_3 setzen wir den Eineckpfad aus $\mathcal{P}(\delta^{x_\delta}, \beta^{x_\beta})$, welcher zwischen x_β und x_δ und eindeutig über den ersten Schnittpunkt (wenn wir bei x_β starten und β folgen) von β mit δ definiert ist. Mit analogen Überlegungen wie im ersten Fall ergibt sich die Aussage.

Seien nun also α, β, δ paarweise nicht disjunkt. Seien $\gamma_i = \alpha' \cup \beta'$ und $\gamma_{i+1} = \alpha'' \cup \beta''$ zwei aufeinander folgende Eineckbögen in $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$. Seien π und σ die Schnittpunkte dieser beiden Bögen mit δ , welche am nächsten zu x_δ liegen. Das heißt, π liegt entweder auf α' oder β' und σ entweder auf α'' oder auf β'' . Wir können $i \in \{0, \dots, n-1\}$ so wählen, dass $\pi \in \alpha'$ und $\sigma \in \beta''$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass π näher an x_δ liegt als σ . Wir betrachten nun den ersten Schnittpunkt nach x_α von α mit dem Teilbogen von δ , dessen Randpunkte x_δ und σ sind, und nennen diesen π' . Wir setzen nun γ_3 als den Eineckbogen zwischen x_δ und x_β , der eindeutig bestimmt ist, durch σ . Als γ_2 setzen wir den Eineckbogen zwischen x_α und x_δ , der eindeutig bestimmt ist durch π' . Nun setzen wir noch $\gamma_1 = \gamma_{i+1}$. Aufgrund der Wahl von σ und π' ist γ_3 tatsächlich ein Eineckbogen in $\mathcal{P}(\delta^{x_\delta}, \beta^{x_\beta})$ und γ_2 tatsächlich ein Eineckbogen in $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \delta^{x_\delta})$. Und γ_1 ist nach Definition ein Eineckbogen in $\mathcal{P}(x_\alpha, x_\beta)$. Durch homotopieren der drei Bögen (siehe Abbildung 5.3) erhalten wir, dass sie paarweise disjunkt sind.

Abbildung 5.3 ist einer Abbildung aus [16] nachempfunden.

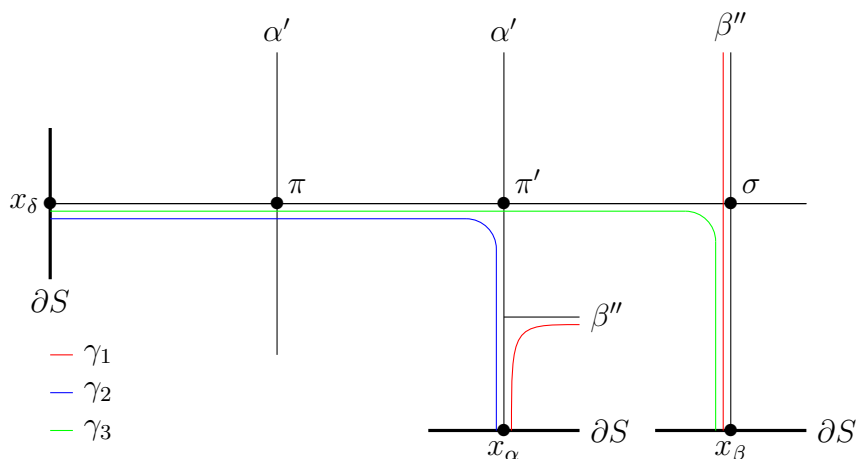


Abbildung 5.3: Die Bögen aus dem Beweis

□

Lemma 5.10. *Sei $\gamma = \gamma_{n-1}$, das heißt $\gamma = \alpha' \cup \beta'$ ist der Eineckbogen, mit der Eigenschaft, dass sich α' nicht mit β schneiden darf, außer natürlich an dem Randpunkt π , welcher nicht x_α ist. Sei $\tilde{\gamma}$ ein zu γ homotoper Bogen, den wir erhalten, indem wir α' von α weg homotopieren, sodass sich $\tilde{\gamma}$ und α' nicht mehr schneiden. Dann gilt entweder, dass $\tilde{\gamma}$ und α in minimaler Position sind, oder, dass sie einen Halbbigon formen. In letzterem Fall können wir $\tilde{\gamma}$ durch den Halbbigon zu $\bar{\gamma}$ homotopieren und erhalten dann, dass $\bar{\gamma}$ und α in minimaler Position sind.*

Beweis. Sei \tilde{x}_α der Endpunkt von $\tilde{\gamma}$, der vor dem homotopieren mit x_α übereingestimmt hat. Sind $\tilde{\gamma}$ und α in minimaler Position, sind wir fertig. Andernfalls müssen sie einen Halbbigon formen, denn würden sie einen Bigon formen, würden α und β schon einen Bigon formen. Da α und β in minimaler Position sind, kann dies aber nicht sein.

Wir nehmen nun also an, dass $\tilde{\gamma}$ und α zusammen mit einem Teilbogen von ∂S einen Halbbigon formen und wollen zeigen, dass wir dann $\tilde{\gamma}$ durch diesen Halbbigon hindurch homotopieren können und so einen Bogen $\bar{\gamma}$ erhalten, welcher mit α in minimaler Position ist. Seien $\tilde{\gamma}' \subset \tilde{\gamma}$ und $\alpha'' \subset \alpha$ die beiden Teilbögen, welche zusammen mit einem Teilbogen von ∂S den Halbbigon formen. Sei π' der Schnittpunkt von $\tilde{\gamma}'$ und α'' . Der andere Randpunkt von $\tilde{\gamma}'$ muss der Punkt \tilde{x}_α sein, da anderenfalls α und β schon einen Halbbigon formen würden. Da $\tilde{\gamma}'$ aus einem zu α homotopen Teilbogen und einem Teilbogen von β besteht und seine beiden Randpunkte \tilde{x}_α und π' sind, muss π' auf β liegen, da \tilde{x}_α der Randpunkt des zu α homotopen Teilbogens ist. Wir wollen nun zeigen, dass auf β zwischen π und π' kein weiterer Schnittpunkt liegt. Es gilt, dass α'' bis auf den Randpunkt π' keinen weiteren Schnittpunkt mit β hat, denn würde β das Innere des Bogens α'' schneiden, würden $\tilde{\gamma}'$ und α'' keinen Bigon formen. Außerdem kann x_α nicht auf α'' liegen, denn sonst wäre α' ein echter Teilbogen von α'' und π würde im Inneren von α'' liegen. Das kann aber nicht sein, da wir eben festgestellt haben, dass α'' , bis auf den Punkt π' , keine gemeinsamen Punkte mit β hat und π nach Konstruktion auf β liegt. Da α'' ein Teilbogen von α ist, der sich an seinem Randpunkt π' mit β schneidet und an seinem anderen Randpunkt den Rand von S schneidet, dieser Punkt aber nicht x_α sein kann, muss dieser Punkt der andere Randpunkt von α sein. Wenn wir nun bei π' starten und unseren Halbbigon entlanglaufen, folgen wir zunächst α'' , solange bis wir auf den Teilbogen von ∂S stoßen, folgen dann diesem bis \tilde{x}_α , woraufhin wir dem zu α' homotopen Teilbogen von $\tilde{\gamma}'$ folgen, bis wir zum ersten Schnittpunkt mit β gelangen, von wo aus wir dann β folgen,

bis wir wieder bei unserem Startpunkt π' ankommen. Der Schnittpunkt des zu α' homotopen Teilbogens von $\tilde{\gamma}'$ mit β liegt nun offensichtlich zwischen π und π' , da sich anderenfalls $\tilde{\gamma}$ und α' schneiden würden. Zwischen diesem Schnittpunkt und dem Punkt π kann auch kein weiterer Schnittpunkt von α und β liegen, da wir sonst durch das Homotopieren von α die Anzahl der Schnittpunkte hätten verringern können. Somit kann auf β zwischen π und π' kein weiterer Schnittpunkt mit α liegen und die Situation, welche in Abbildung 5.4 zu sehen ist, ist die einzige Möglichkeit, wie der Halbbigon aussehen kann.

Als nächstes werden wir den Bogen $\bar{\gamma}$ konstruieren. Sei dazu β'' der Teilbogen von β , mit $\partial\beta'' = \{\pi', x_\beta\}$. Dann erhalten wir $\bar{\gamma}$, indem wir den Bogen $\alpha'' \cup \beta''$ von α'' weg homotopieren. Mit der selben Argumentation wie für $\tilde{\gamma}$, wobei wir jetzt mit dem Randpunkt von α , welcher nicht x_α ist, argumentieren, erhalten wir, dass $\bar{\gamma}$ und α entweder in minimaler Position sind oder einen Halbbigon formen. Sind sie in minimaler Position, sind wir fertig. Nehmen wir also an, dass es Teilbögen $\tilde{\gamma}' \subset \bar{\gamma}$ und $\alpha''' \subset \alpha$ gibt, welche zusammen mit einem Teilbogen von ∂S einen Halbbigon formen. Dann folgt aber, dass x_α auf α''' liegt, nach der selben Argumentation wie oben, wobei wir die Randpunkte von α vertauschen müssen. Somit gilt dann auch, dass α' ein echter Teilbogen von α''' ist und analog zu oben π im Inneren von α''' liegen müsste. Dies ist aber ein Widerspruch, da α''' bis auf einen Randpunkt von β disjunkt ist.

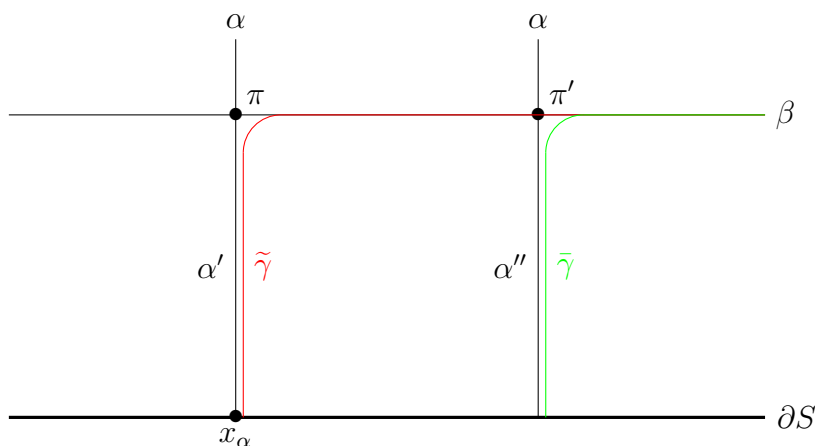


Abbildung 5.4: Der einzig mögliche Halbbigon, den $\tilde{\gamma}$, α und ein Teilbogen von ∂S bilden können

□

Lemma 5.11. *Für alle $0 \leq i < j \leq n$ ist $\mathcal{P}(\gamma_i^{x_\alpha}, \gamma_j^{x_\beta})$ ein Teilpfad von $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$ oder, falls $j = i + 2$ ist, sind γ_i und γ_j disjunkt.*

Beweis. Es genügt die Aussage für $i = 0$ und $j = n - 1$ zu zeigen. Wenn wir gezeigt haben, dass der Eineckpfad $\mathcal{P}(\gamma_0^{x_\alpha}, \gamma_{n-1}^{x_\beta})$ ein Teilpfad von $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\alpha})$ ist, können wir das selbe Argument auf den Eineckpfad $\mathcal{P}(\gamma_0^{x_\alpha}, \gamma_{n-1}^{x_\beta})$ anwenden und erhalten, dass $\mathcal{P}(\gamma_0^{x_\alpha}, \gamma_{n-2}^{x_\beta})$ ein Teilpfad ist. Da die beiden Eineckpfade $\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$ und $\mathcal{P}(\beta^{x_\beta}, \alpha^{x_\alpha})$ übereinstimmen, können wir mit Hilfe des Falles $i = 0$ und $j = n - 1$ alle Möglichkeiten durch iteriertes Anwenden und der „Symmetrie“ beweisen.

Sei nun also $i = 0$, das heißt $\gamma_i = \alpha$ und $j = n - 1$, das heißt, für $\gamma_j = \gamma_{n-1} = \alpha' \cup \beta'$ gilt, dass α' den Bogen β nur in dem von x_α verschiedenen Randpunkt π schneidet. Sei $\tilde{\gamma}$ der Bogen, den wir erhalten, wenn wir γ_{n-1} auf die selbe Weise homotopieren, wie wir γ in Lemma 5.10 homotopiert haben. Da wir γ_{n-1} nur homotopiert haben, können wir die Aussage nun statt für γ_{n-1} auch für $\tilde{\gamma}$ zeigen. Nach Lemma 5.10 sind α und $\tilde{\gamma}$ nun entweder in minimaler Position oder sie bilden einen Halbbigon. Seien α und $\tilde{\gamma}$ zunächst in minimaler Position. Einer der Randpunkte von $\tilde{\gamma}$ ist nach Konstruktion x_β und der andere ein, wie im Beweis von Lemma 5.10, zu x_α korrespondierender. Wir betrachten nun alle Schnittpunkte von α und β , welche Eineckbögen zwischen x_α und x_β definieren außer den Schnittpunkt π . Da α und $\tilde{\gamma}$ in minimaler Position sind, gilt nun, dass diese Schnittpunkte gerade mit den Schnittpunkten von α und $\tilde{\gamma}$, welche Eineckbögen zwischen x_α und x_β definieren, übereinstimmen (wobei wir x_β hier als Randpunkt von $\tilde{\gamma}$ auffassen). Somit gilt $\mathcal{P}(\gamma_0^{x_\alpha}, \gamma_{n-1}^{x_\beta}) = \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \tilde{\gamma}^{x_\beta}) \subset \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta})$.

Seien nun α und $\tilde{\gamma}$ nicht in minimaler Position, das heißt, sie formen einen Halbignon. Nach Lemma 5.10 können wir $\tilde{\gamma}$ nun zu einem Bogen $\bar{\gamma}$ homotopieren, welcher mit α in minimaler Position ist. Seien π, π', α'' und β'' wie im Beweis von Lemma 5.10. Dann gilt, dass die Schnittpunkte von α und β , welche Eineckbögen zwischen x_α und x_β definieren, außer den Schnittpunkten π und π' mit den Schnittpunkten von α und $\bar{\gamma}$, welche Eineckbögen zwischen x_α und x_β definieren, übereinstimmen, da α und $\bar{\gamma}$ in minimaler Position sind. Wenn der Schnittpunkt π' nun keinen Eineckbogen definiert, also wenn sich $\alpha \setminus \alpha''$ und β'' schneiden, sind wir fertig, da wir uns dann in der selben Situation wie oben befinden. Nehmen wir nun an, dass π' einen Eineckbogen zwischen x_α und x_β definiert und nennen diesen $c_k = \alpha''' \cup \beta'''$. Nach Konstruktion gilt $\alpha''' = \alpha \setminus \alpha''$ und $\beta''' = \beta''$. Außerdem gilt, dass alle anderen Teilbögen von α , die ein Teil eines, zu c_1 verschiedenen, Eineckbogens sind, schon in α''' enthalten sein müssen und, dass β''' in allen anderen Teilbögen von β , welche Teil eines, zu c_1 verschiedene, Eineckbogens sind, enthalten sein muss. Somit folgt,

dass $c_k = c_1$. Zusätzlich gilt in diesem Fall, dass c_1 der Vorgänger von $c_j = c_{n-1}$ ist. Das heißt $j = 2$. Das liegt daran, dass sich $\alpha \setminus \alpha''$ und β'' nicht schneiden und somit π und π' die einzigen Schnittpunkte sind, welche Eineckbögen definieren. \square

Definition 5.12. Seien a und b Ecken in $\mathcal{A}(S)$. Seien $\alpha \in a$ und $\beta \in b$ Repräsentanten in minimaler Position und seien x_α, y_α die Randpunkte von α und x_β, y_β die Randpunkte von β . Dann definieren wir

$$P(a, b) = \begin{cases} \{\text{Kante zwischen } a \text{ und } b\} & i(a, b) = 0 \\ \{\mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{x_\beta}), \mathcal{P}(\alpha^{x_\alpha}, \beta^{y_\beta}), \mathcal{P}(\alpha^{y_\alpha}, \beta^{x_\beta}), \mathcal{P}(\alpha^{y_\alpha}, \beta^{y_\beta})\} & i(a, b) \neq 0 \end{cases}$$

$P(a, b)$ ist also eine Kante in $\mathcal{A}(S)$, wenn die beiden Homotopieklassen mit einer Kante verbunden sind, oder $P(a, b)$ ist gleich der Menge der vier Eineckpfade.

Lemma 5.13. Seien x_0, \dots, x_m Ecken in $\mathcal{A}(S)$ mit $m \leq 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt, für jedes $\gamma \in \mathcal{P} \in P(x_0, x_m)$ existiert ein $0 \leq i < m$ und ein $\gamma^* \in \mathcal{P}^* \in P(x_i, x_{i+1})$, sodass für die Homotopieklassen c und c^* von γ beziehungsweise γ^* gilt $|c, c^*|_{\mathcal{A}(S)} \leq k$

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für den Fall, dass $m = 2^k$ ist. Bezeichne x_0x_m den Eineckpfad aus $P(x_0, x_m)$, welcher c als Ecke enthält. Nun müssen die anderen Ecken x_1, \dots, x_{m-1} nicht unbedingt auf dem Pfad x_0x_m liegen. Betrachten wir die Ecke $x_{\frac{m}{2}}$ und nehmen an, dass sie nicht auf x_0x_m liegt. Jetzt nehmen wir uns einen der vier Eineckpfade aus $P(x_0, x_{\frac{m}{2}})$, welchen wir mit $x_0x_{\frac{m}{2}}$ bezeichnen, und einen der vier Eineckpfade aus $P(x_{\frac{m}{2}}, x_m)$, welchen wir mit $x_{\frac{m}{2}}x_m$ bezeichnen. Nun befinden wir uns in der Situation von Lemma 5.8, denn wir haben drei Homotopieklassen $x_0, x_{\frac{m}{2}}, x_m$ einfacher, essentieller Bögen, aus denen wir uns Bögen wählen können, welche paarweise in minimaler Position sind. Außerdem haben wir drei Eineckpfade zwischen diesen drei Bögen. Nach Lemma 5.8 finden wir für alle Bögen $\gamma \in x_0x_m$ einen Bogen $\gamma' \in (x_0x_{\frac{m}{2}} \cup x_{\frac{m}{2}}x_m)$, für deren Homotopieklassen c und c' gilt $i(c, c') = 0$ also insbesondere $|c, c'|_{\mathcal{A}(S)} = 1$. Sollte die Ecke $x_{\frac{m}{2}}$ auf dem Pfad x_0, x_m liegen, so folgt natürlich, dass die Pfade $x_0x_{\frac{m}{2}}$ und $x_{\frac{m}{2}}x_m$ Teilpfade von x_0x_m sind und somit finden wir für jede Ecke auf x_0x_m eine Ecke auf einem der beiden Teilpfade, welche übereinstimmen und somit Abstand 0 haben. Wenn $k = 1$ ist, sind wir an diesem Punkt schon fertig.

Andernfalls müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Wenn γ' auf dem Pfad $x_0x_{\frac{m}{2}}$ liegt, so betrachten wir die drei Ecken $x_0, x_{\frac{m}{2}}$ und $x_{\frac{m}{4}}$. Andernfalls betrachten wir die drei Ecken $x_m, x_{\frac{m}{2}}$ und $x_{\frac{3m}{4}}$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass wir uns

im ersten Fall befinden. Nun können wir wieder einen der vier Eineckpfade zwischen je zwei der drei Ecken wählen und befinden uns wieder in der Situation von Lemma 5.8. Wir finden also für jede Ecke auf dem Pfad $x_0x_{\frac{m}{2}}$ eine Ecke auf einem der beiden anderen Pfade, welche einen Abstand von 1 oder 0 zu der Ecke auf $x_0x_{\frac{m}{2}}$ hat. Also finden wir auch eine Ecke auf einem der beiden anderen Pfade, welche Abstand 1 oder 0 zu γ' hat. Nennen wir diese Ecke γ'' und nehmen ohne Einschränkung an, dass sie auf dem Pfad $x_0x_{\frac{m}{4}}$ liegt. Ist $k = 2$ sind wir wieder fertig, denn dann ist $m = 4$ und γ'' liegt auf einem Eineckpfad $x_0x_1 \in P(x_0, x_1) = P(x_i, x_{i+1})$ und für den Abstand von c und c'' , wobei c'' die Homotopieklasse von γ'' sei, gilt $|c, c''| \leq |c, c'| + |c', c''| \leq 1 + 1 = 2$.

Wenn $k > 2$ wenden wir dieses Verfahren k mal an und erhalten die Aussage.

Wenn $2^{k-1} < m < 2^k$ ist, so können wir mit dem selben Verfahren vorgehen, allerdings betrachten wir dann nicht mehr $x_{\frac{m}{2}}$, da $\frac{m}{2}$ im Allgemeinen keine natürliche Zahl mehr sein wird, sondern $x_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}$. Ansonsten geht der Beweis in diesem Fall analog.

In der Abbildung 5.5 wird die Situation am Beispiel mit $k = 3$, das heißt, mit $m = 8$ verdeutlicht. Dabei seien die durchgehenden Linien Eineckpfade zwischen den jeweiligen Ecken (d.h. es können noch Ecken auf den Pfaden liegen, welche allerdings nicht eingezeichnet wurden). Die gestrichelten Linien sind keine Pfade sondern Kanten und haben per Definition alle Länge 1. Wie man an der Abbildung sieht, ist der Abstand zwischen c und c'' höchstens 3. Sollten zwei Ecken zum Beispiel c' und c'' übereinstimmen, so bleibt die Aussage trotzdem richtig, da wir nur eine Abschätzung zeigen wollen. Mit Hilfe der Abbildung sieht man auch, dass der Beweis analog verläuft, sollte zum Beispiel c' nicht auf dem Pfad x_0x_4 , sondern auf dem Pfad x_4x_8 liegen.

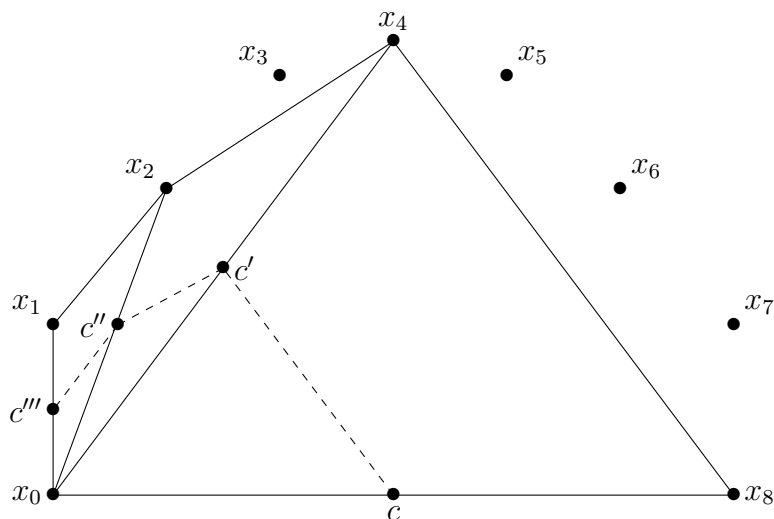


Abbildung 5.5: Die Situation im Beweis am Beispiel mit $k = 3$

□

Lemma 5.14. *Seien a und b zwei Ecken in $\mathcal{A}(S)$ und sei \mathcal{G} eine Geodäte zwischen a und b , das heißt $l(g) = |a, b|_{\mathcal{A}(S)}$. Dann gilt für alle $\gamma \in \mathcal{P} \in P(a, b)$, dass die Homotopieklasse c von γ einen Abstand von höchstens 6 zu \mathcal{G} hat, das heißt $|c, \mathcal{G}|_{\mathcal{A}(S)} \leq 6$*

Beweis. Sei also $\gamma \in \mathcal{P} \in P(a, b)$ so gewählt, dass für die Homotopieklasse c von γ gilt, dass sie maximalen Abstand zu \mathcal{G} hat. Diesen Abstand bezeichnen wir mit k und wollen nun zeigen, dass $k = 6$ gilt. Wir können auf jeden Fall annehmen, dass $k \geq 1$ ist, denn andernfalls wäre $c \in \mathcal{G}$ und wir wären fertig. Wir wissen nun also, dass c auf einem Pfad zwischen a und b liegt und an der Stelle c ist der Abstand k zu \mathcal{G} maximal. Nun können wir uns Ecken auf diesem Pfad anschauen, deren Abstand zu c höchstens $2k$ ist. Wir nennen die beiden Ecken, welche genau Abstand $2k$ zu c haben, a' und b' und sehen ein, dass dies ein Teilpfad ist, welchen wir mit $a'b'$ bezeichnen. Also zum Beispiel sind, da $k \geq 1$ ist, die benachbarten Ecken von c , also die Ecken auf dem Pfad, welche mit c durch eine Kante verbunden sind, auf jeden Fall in dem Teilpfad $a'b'$ enthalten. Nach Lemma 5.11 wissen wir, dass $a'b' \in P(a, b)$. Seien nun $a'' \in \mathcal{G}$ so gewählt, dass der Abstand zu a' minimal ist und $b'' \in \mathcal{G}$ so gewählt, dass der Abstand zu b' minimal ist. Da c schon Abstand k zu \mathcal{G} hat und wir angenommen hatten, dass dieser maximal sein soll, gilt $|a'', a'|_{\mathcal{A}(S)} \leq k$ und $|b'', b'|_{\mathcal{A}(S)} \leq k$. Gilt $a' = a$ oder $b' = b$, wählen wir natürlich $a'' = a$ beziehungsweise $b'' = b$. Es folgt

$$|a'', b''|_{\mathcal{A}(S)} \leq |a'', a'|_{\mathcal{A}(S)} + |a', b'|_{\mathcal{A}(S)} + |b', b''|_{\mathcal{A}(S)} \leq k + 4k + k = 6k$$

Wir betrachten nun den Teilpfad von \mathcal{G} , welcher zwischen a'' und b'' liegt und nennen diesen $a''b''$. Diesen Teilpfad verketteten wir nun mit einer Geodäte zwischen a' und a'' und mit einer Geodäte zwischen b' und b'' . Diese Geodäten nennen wir $a'a''$ beziehungsweise $b'b''$. Nun benennen wir noch die Ecken auf diesem Pfad mit x_0, \dots, x_m . Offensichtlich hat ein Pfad von Länge k genau $k + 1$ Ecken. Somit gilt, dass auf dem Pfad $a'a''$, für den gilt $l(a'a'') \leq k$, höchstens $k + 1$ Ecken liegen können. Gleiches gilt für den Pfad $b'b''$. Für $a''b''$ gilt, wie wir eben eingesehen haben, dass er höchstens Länge $6k$ haben kann, also können höchstens $6k + 1$ viele Ecken auf dem Pfad liegen. Die Verkettung diese drei Pfade hat dann also höchstens $k + 1 + k + 1 + 6k - 2 = 8k$ Ecken (wir müssen noch 2 abziehen, da wir sonst die Ecken a'' und b'' doppelt zählen). Somit gilt $m \leq 8k$. Nach Lemma 5.13 gibt es ein $x_i \in \{x_0, \dots, x_m\}$ mit $|c, x_i| \leq \lceil \log_2 8k \rceil$. Nun können zwei Fälle eintreten, entweder $x_i \notin \mathcal{G}$ oder $x_i \in \mathcal{G}$.

Im ersteren Fall können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x_i \in a'a''$. Dann gilt

$$|c, x_i|_{\mathcal{A}(S)} \geq \underbrace{|c, a'|_{\mathcal{A}(S)}}_{=2k} - \underbrace{|a', x_i|_{\mathcal{A}(S)}}_{\leq k} \geq k \Rightarrow \lceil \log_2 8k \rceil \geq k$$

Im zweiten Fall gilt

$$\lceil \log_2 8k \rceil \geq |c, x_i|_{\mathcal{A}(S)} \geq |c, \mathcal{G}|_{\mathcal{A}(S)} = k \Rightarrow \lceil \log_2 8k \rceil \geq k$$

Die Ungleichung $\lceil \log_2 8k \rceil \geq k$ ist aber nur für $k \leq 6$ erfüllt, denn

$$\log_2 8k \geq k \Leftrightarrow 8k \geq 2^k \Leftrightarrow k \geq \frac{2^k}{8} \Leftrightarrow k \geq 2^{k-3} \Leftrightarrow k \leq 5$$

Da wir aber nicht nur $\log_2 8k$, sondern $\lceil \log_2 8k \rceil$ betrachten, also noch aufrunden müssen, ist $k = 6$ auch erlaubt, denn $\log_2 8 \cdot 6 \approx 5.6$, also ist $\lceil \log_2 48 \rceil = 6$ und somit ist die Ungleichung auch für $k = 6$ erfüllt. \square

Satz 5.15. $\mathcal{A}(S)$ ist 7-hyperbolisch.

Beweis. Sei abd ein geodätisches Dreieck in $\mathcal{A}(S)$ und bezeichne ab, ad, db die jeweiligen Geodäten. Wir betrachten nun $P(a, b), P(a, d), P(d, b)$ und finden nach Lemma 5.9 Bögen $\gamma_{ab} \in \mathcal{P} \in P(a, b), \gamma_{ad} \in \mathcal{P} \in P(a, d), \gamma_{db} \in \mathcal{P} \in P(d, b)$, deren Homotopieklassen c_{ab}, c_{ad}, c_{db} Ecken in $\mathcal{A}(S)$ bilden, wobei jeweils zwei dieser Ecken durch eine Kante verbunden sind. Nun können wir Lemma 5.14 auf die drei Ecken c_{ab}, c_{ad}, c_{db} und auf die drei Geodäten ab, ad, db anwenden und finden Ecken

$x \in ab, y \in ad, z \in db$, für die gilt

$$|c_{ab}, x|_{\mathcal{A}(S)} \leq 6 \text{ und } |c_{ad}, y|_{\mathcal{A}(S)} \leq 6 \text{ und } |c_{db}, z|_{\mathcal{A}(S)} \leq 6$$

Da zusätzlich gilt $|c_{ab}, c_{ad}|_{\mathcal{A}(S)} = |c_{ab}, c_{db}|_{\mathcal{A}(S)} = |c_{db}, c_{ad}|_{\mathcal{A}(S)} = 1$ können wir uns eine der drei Ecken wählen, zum Beispiel c_{ab} und erhalten

$$\begin{aligned} |c_{ab}, x|_{\mathcal{A}(S)} &\leq 6 < 7 \\ |c_{ab}, y|_{\mathcal{A}(S)} &\leq |c_{ab}, c_{ad}|_{\mathcal{A}(S)} + |c_{ad}, y|_{\mathcal{A}(S)} \leq 1 + 6 = 7 \\ |c_{ab}, z|_{\mathcal{A}(S)} &\leq |c_{ab}, c_{db}|_{\mathcal{A}(S)} + |c_{db}, z|_{\mathcal{A}(S)} \leq 1 + 6 = 7 \end{aligned}$$

Damit folgt, dass alle Seiten höchstens einen Abstand von 7 zu c_{ab} haben, und somit gilt, dass das geodätische Dreieck abd 7-zentriert an der Ecke c_{ab} ist. Da wir das geodätische Dreieck beliebig gewählt hatten, gilt dies für alle geodätischen Dreiecke und somit folgt, dass $\mathcal{A}(S)$ 7-hyperbolisch ist. \square

5.2. Die Hyperbolizität des Kurvengraphen

Definition 5.16. Sei S eine Fläche. Wir definieren folgende Abbildung

$$r : \mathcal{AC}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S),$$

wobei r eingeschränkt auf $\mathcal{C}(S)$ die Identität sei (das heißt Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven werden festgehalten). Die Homotopieklasse a eines einfachen, essentiellen Bogens wird auf die Homotopieklasse einer Randkomponente einer Umgebung von der Vereinigung eines Repräsentanten von a mit Randkomponenten von S abgebildet.

Genauer gesagt, sei $a \in \mathcal{A}(S)$ und sei α ein Repräsentant von a , dann gilt, dass die Randpunkte von α auf ∂S liegen. Liegen die Randpunkte von α auf der selben Randkomponente von S , vereinigen wir den Teilbogen von ∂S , welcher zwischen den beiden Randpunkten liegt, mit dem Bogen α . Liegen die Randpunkte auf verschiedenen Randkomponenten, vereinigen wir beide Randkomponenten mit α . Nun betrachten wir eine hinreichend kleine Umgebung dieser Vereinigung (siehe Abbildung 5.6 für den ersten Fall und Abbildung 5.7 für den zweiten Fall). Der Rand dieser Umgebung hat entweder eine oder zwei Komponenten. Aber mindestens eine der Randkomponenten muss auf S eine essentielle Kurve bilden. Da diese Kurve eine Randkomponente einer Umgebung auf S ist, muss sie auch einfach sein. Das heißt, die Randkomponente der Umgebung (in den Abbildungen die roten Li-

nien) bildet eine einfache, essentielle Kurve auf S und deren Homotopieklasse c eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$. Wir setzen dann $r(a) = c$.

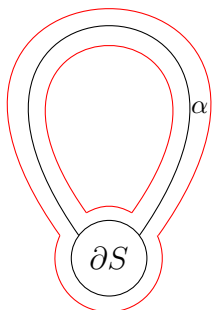


Abbildung 5.6: Die beiden Randpunkte von α liegen auf der selben Randkomponente.

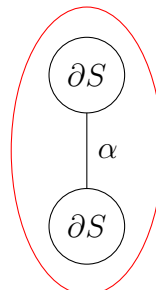


Abbildung 5.7: Die beiden Randpunkte von α liegen auf unterschiedlichen Randkomponenten.

Satz 5.17. Die Abbildung $r : \mathcal{AC}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S)$ aus Definition 5.16 ist 2-Lipschitz. Das heißt, für alle Ecken a, b in $\mathcal{AC}(S)$ gilt

$$|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} \leq 2 |a, b|_{\mathcal{AC}(S)}$$

Beweis. Wir orientieren uns bei diesem Beweis sowohl an [16] (Achtung: In diesem Artikel wird die Aussage für nicht orientierbare Flächen gezeigt) als auch an [8]. Seien a, b Ecken in $\mathcal{AC}(S)$. Es genügt die Aussage für den Fall $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$ zu zeigen. Denn wenn $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = n \in \mathbb{N}_{>1}$ finden eine Folge von Ecken $a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$, mit $|c_i, c_{i+1}|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$ für alle $i = 0, \dots, n-1$, auf welche wir diesen Fall dann anwenden können.

Gelte also $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$, dann müssen wir zeigen, dass $|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} \leq 2$. Sind a und b Ecken in $\mathcal{C}(S)$, sind wir fertig, denn dann gilt $|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} = |a, b|_{\mathcal{C}(S)} = |a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = 1 < 2$. Sei nun a eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ und b eine Ecke in $\mathcal{A}(S)$. Da $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$ gilt $i(a, b) = 0$ und wir finden Repräsentanten α und β , welche sich nicht schneiden. Nun können wir wieder eine Umgebung von β vereinigt mit den beziehungsweise der Randkomponente(n) von S betrachten, wie in Definition 5.16 beschrieben. Diese Umgebung können wir nun so wählen, dass sie entweder disjunkt von α ist oder so, dass eine ihrer Randkomponenten mit α übereinstimmt. Im ersten Fall gilt für die Homotopieklasse c dieser Randkomponente $i(a, c) = 0$ und somit auch $|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} = |a, c|_{\mathcal{AC}(S)} = 1 < 2$. Im zweiten Fall gilt $c = a$ und somit $|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} = |a, a|_{\mathcal{AC}(S)} = 0 < 2$.

Gelte nun also a und b sind Ecken in $\mathcal{A}(S)$ mit $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$. Das heißt, wir

finden einfache, essentielle, disjunkte Bögen $\alpha \in a$ und $\beta \in b$, deren Randpunkte auf Randkomponenten von S liegen. Liegen die Randpunkte von α und β auf verschiedenen Randkomponenten, finden wir Umgebungen, welche ebenfalls disjunkt oder gleich sind. In beiden Fällen gilt aber $|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} \leq 1 < 2$.

Gelte nun also, dass es eine Randkomponente von S gibt, auf der mindestens ein Randpunkte von α und mindestens ein Randpunkt von β liegt. Finden wir eine einfache, essentielle Kurve γ auf $S \setminus (\alpha \cup \beta)$, so ist diese auch disjunkt von $r(\alpha)$ und $r(\beta)$. Somit folgt, dass sowohl $r(a)$ als auch $r(b)$ mit der Homotopieklasse von γ durch eine Kante verbunden sind und somit gilt $|r(a), r(b)|_{\mathcal{C}(S)} \leq 2$. Finden wir eine solche Kurve nicht, so gilt für die Fläche S , dass $S = S_{1,2}$, $S = S_{1,1}$ oder $S = S_{0,4}$. Da wir nur Flächen mit $3g + b \geq 5$ betrachten, führen die beiden letzten Fälle zu einem Widerspruch. In dem Artikel [8] werden diese Fälle auch bewiesen, allerdings beschränken wir uns in dieser Arbeit auf den Kurvengraph von Flächen mit $3g + b \geq 5$. Auch der Fall $S = S_{1,2}$ kann in [8] nachgelesen werden. \square

Korollar 5.18. *Sei a die Homotopieklasse einer einfachen, essentiellen Kurve und b die Homotopieklasse eines einfachen, essentiellen Bogens auf S (d.h. a ist eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ und b ist eine Ecke in $\mathcal{AC}(S)$) und es gelte $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$. Dann gilt*

$$|a, r(b)|_{\mathcal{C}(S)} \leq 1$$

Beweis. Folgt direkt aus dem Beweis von Satz 5.17 \square

Korollar 5.19. *Seien a und b Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven auf S und gelte $|a, b|_{\mathcal{AC}(S)} = L$ wobei $L \geq 2$ sei. Dann gilt*

$$|a, b|_{\mathcal{C}(S)} \leq 2L - 2 \leq 2L$$

Insbesondere ist eine Geodäte in $\mathcal{C}(S)$ eine 2-Quasi-Geodäte in $\mathcal{AC}(S)$.

Beweis. Wir folgen einem Beweis aus [17, Seite 11].

Sei $(c_i)_{i \in \{1, \dots, L\}}$ die Ecken in $\mathcal{AC}(S)$, die auf einer Geodäte in zwischen a und b liegen (d.h. $c_0 = a$ und $c_L = b$). Also gilt, dass c_0 und c_1 Kurven sind und insbesondere $r(c_0) = c_0$ und $r(c_1) = c_1$. Die anderen Ecken auf der Geodäte könnten auch Bögen sein. Somit folgt mit Korollar 5.18

$$|c_0, r(c_1)|_{\mathcal{C}(S)} \leq 1 \text{ und } |r(c_{L-1}), c_L|_{\mathcal{C}(S)} \leq 1$$

Für $i \in \{1, \dots, L - 2\}$ gilt nach Satz 5.17

$$|r(c_i), r(c_{i+1})|_{\mathcal{C}(S)} \leq 2|c_i, c_{i+1}|_{\mathcal{AC}(S)} \leq 2$$

Somit folgt dann

$$|a, b|_{\mathcal{C}(S)} = |c_0, c_L|_{\mathcal{C}(S)} \leq 1 + (L - 2)2 + 1 = 2L - 2$$

□

Satz 5.20. *Sei $S = S_{g,b,n}$ mit $3g + b \geq 5$. Dann ist $\mathcal{C}(S)$ 17-hyperbolisch.*

Beweis. Wir unterscheiden bei diesem Beweis zwei Fälle. Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Rand von S nicht leer ist.

Seien a, b, d Ecken in $\mathcal{C}(S)$ und bezeichne $T = abd$ ein geodätisches Dreieck in $\mathcal{C}(S)$. Die drei Seiten von T bezeichnen wir mit ab, ad, bd . Da alle drei Seiten Geodäten in $\mathcal{C}(S)$ sind, folgt mit Korollar 5.19, dass sie 2-Quasi-Geodäten in $\mathcal{AC}(S)$ sind.

Seien $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ Ecken in $\mathcal{AC}(S)$ mit $|a, \bar{a}|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$, $|b, \bar{b}|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$, $|d, \bar{d}|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$.

Sei weiter $\bar{\gamma} \in \mathcal{P} \in P(\bar{a}, \bar{b})$ so gewählt, dass für die Homotopieklasse \bar{c} von $\bar{\gamma}$ gilt, dass sie maximalen Abstand zu $\mathcal{G} = ab$ hat. Diesen Abstand bezeichnen wir mit k und können $k \geq 1$ annehmen. Wie im Beweis von Lemma 5.14 definieren wir a', b' als die Ecken auf \mathcal{P} , welche genau Abstand $2k$ zu \bar{c} haben und betrachten dann den Teilpfad $a'b' \subset \mathcal{P}$. Auch $a'', b'' \in \mathcal{G}$ definieren wir wie im Beweis von Lemma 5.14, also so, dass a'' und b'' den kürzesten Abstand zu a' beziehungsweise b' haben. Mit der selben Argumentation wie im Beweis von Lemma 5.14 folgt $|a'', b''|_{\mathcal{AC}(S)} \leq 6k$ und wir können wieder die Ecken auf dem Pfad, welcher sich als Verkettung von $a''b''$ mit Geodäten $a'a''$ und $b'b''$ zusammensetzt, mit $(x_i)_{i \in \{0, \dots, m\}}$ bezeichnen. Da \mathcal{G} eine Geodäte in $\mathcal{C}(S)$ ist, ist sie eine 2-Quasi-Geodäte in $\mathcal{AC}(S)$ und somit ist auch $a''b''$ als Teilpfad von \mathcal{G} eine 2-Quasi-Geodäte in $\mathcal{AC}(S)$. Außerdem gilt, dass die Pfade $a'a''$ und $b'b''$ wieder höchstens $k + 1$ Ecken haben und somit folgt

$$m \leq k + 1 + 2|a'', b''|_{\mathcal{AC}(S)} + k + 1 - 2 = 2k + 12k = 14k.$$

Nun wollen wir wieder Lemma 5.13 anwenden um den Abstand von \bar{c} zu dem Pfad x_0, \dots, x_m abzuschätzen. Da allerdings nicht alle Ecken auf diesem Pfad Homotopieklassen von Bögen sind und wir das Lemma nur für Pfade gezeigt haben, deren Ecken Homotopieklassen einfacher, essentieller Bögen sind, müssen wir einen Umweg gehen. Wir werden nun einen Pfad konstruieren, welcher „nahe“ an dem Pfad x_0, \dots, x_m liegt und dessen Ecken nur aus Homotopieklassen einfacher, essentieller

Bögen besteht.

Seien dazu \bar{x}_i Homotopieklassen einfacher, essentieller Bögen, also Ecken in $\mathcal{AC}(S)$ mit $|\bar{x}_i, x_i|_{\mathcal{AC}(S)} \leq 1$ und $|\bar{x}_i, x_{i+1}|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$, das heißt, \bar{x}_i ist entweder mit x_i und mit x_{i+1} durch eine Kante verbunden oder stimmt mit x_i überein und ist mit x_{i+1} durch eine Kante verbunden. Genauer gesagt, setzten wir $\bar{x}_i = x_i$ genau dann, wenn x_i schon eine Homotopieklasse einfacher, essentieller Bögen ist. Dann gilt, dass alle Eineckpfade in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ entweder Abstand 1 oder Abstand 0 zu x_{i+1} haben. Denn falls sowohl \bar{x}_i als auch \bar{x}_{i+1} mit x_{i+1} durch eine Kante verbunden sind (das heißt, x_i und x_{i+1} sind Homotopieklassen einfacher, essentieller Kurven), finden wir Repräsentanten von \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1} und x_{i+1} , wobei sich die Repräsentanten von \bar{x}_i und von \bar{x}_{i+1} nicht mit dem von x_{i+1} schneiden. Somit sind alle Eineckbögen, deren Randpunkte mit denen der Repräsentanten von \bar{x}_i und \bar{x}_{i+1} übereinstimmen, disjunkt von dem Repräsentanten von x_{i+1} und somit sind auch alle Homotopieklassen von Eineckpfade in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ disjunkt von x_{i+1} . Also sind sie durch Kanten verbunden und der Abstand aller Eineckpfade in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ zu x_{i+1} ist genau 1. Falls entweder $\bar{x}_i = x_i$ und $\bar{x}_{i+1} = x_{i+1}$ (das heißt sowohl x_i als auch x_{i+1} sind Homotopieklassen einfacher, essentieller Bögen), so sind sie per Konstruktion schon mit einer Kante verbunden und somit finden wir Repräsentanten von \bar{x}_i und \bar{x}_{i+1} , welche disjunkt sind und es gibt nur genau einen Eineckpfad in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$, welcher mit dem Pfad $x_i x_{i+1}$ übereinstimmt. Somit ist der Abstand dieser beiden Pfade genau 0. Gilt, dass $\bar{x}_i = x_i$ und $\bar{x}_{i+1} \neq x_{i+1}$ (das heißt x_i ist Homotopieklasse eines einfachen, essentiellen Bogens und x_{i+1} einer einfachen, essentiellen Kurve), so sind \bar{x}_i und \bar{x}_{i+1} per Definition schon mit x_{i+1} durch eine Kante verbunden und wir finden wie im ersten Fall wieder disjunkte Repräsentanten und das selbe gilt dann auch für alle Eineckbögen. Somit haben wir gezeigt, dass für alle $i = 0, \dots, m-1$ der Abstand aller Eineckpfade in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ zu x_{i+1} höchstens 1 ist.

In Abbildung 5.8 ist die Situation beispielhaft dargestellt. Die gewellten Linien bilden dabei Eineckpfade. Für $i = 2, \dots, m-2$ sind die Abstände der Eineckpfade zwischen den x_i und x_{i+1} zu x_{i+1} genau 1 und für alle anderen sind die Abstände genau 0.

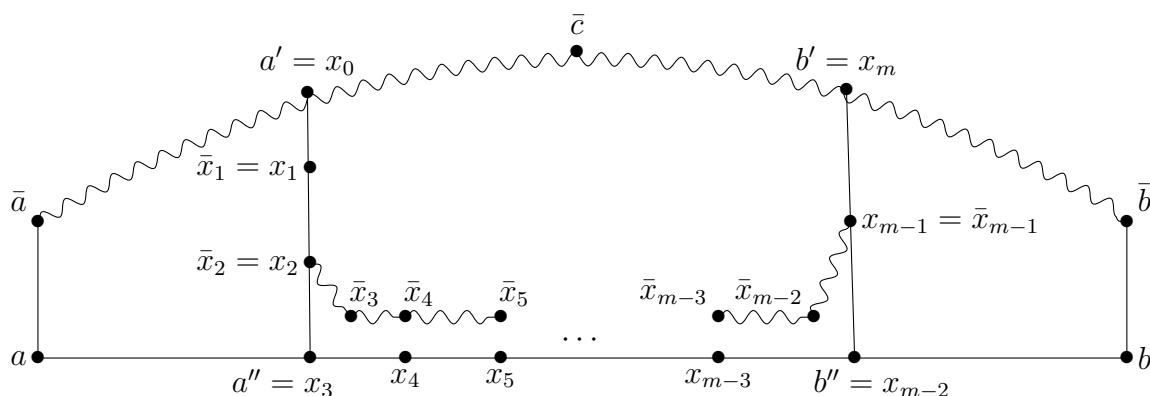


Abbildung 5.8: Die Situation im Beweis

Nach Lemma 5.11 und Lemma 5.13 gilt, dass der Abstand von \bar{c} zu einem Eineckpfad in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ höchstens $\lceil \log_2 14k \rceil$ ist. Da für alle Eineckpfade in $P(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ der Abstand zu \mathcal{G} gerade 1 ist und der Abstand von \bar{c} zu \mathcal{G} , welchen wir auf k gesetzt hatten, maximal ist, gilt $\lceil \log_2 14k \rceil + 1 \geq k$. Diese Ungleichung ist aber nur für $k \leq 8$ erfüllt.

Wir haben nun also gezeigt, dass für alle $\bar{\gamma} \in \mathcal{P} \in P(\bar{a}, \bar{b})$ die Homotopieklasse \bar{c} von $\bar{\gamma}$ als Ecke in $\mathcal{AC}(S)$ höchstens einen Abstand von 8 zu $\mathcal{G} = ab$ hat.

Nach Lemma 5.9 gilt, dass es Ecken in $\bar{c} \in P(\bar{a}, \bar{b}), \bar{e} \in P(\bar{a}, \bar{d}), \bar{f} \in P(\bar{b}, \bar{d})$ gibt, welche paarweise durch Kanten verbunden sind. Es folgt, dass \bar{c} höchstens Abstand 9 zu allen drei Seiten von T haben kann. Seien x, y, z Punkte auf den drei Seiten von T , welche den Abstand zu \bar{c} minimieren. Es gilt, dass \bar{c} ein Bogen ist, da er ein Element eines Eineckpfades ist. Deshalb wird \bar{c} unter der Abbildung r aus Definition 5.16 nicht auf sich selbst geschickt. Wir setzen $c = r(\bar{c})$. Nach der Definition der Abbildung r gilt $|c, \bar{c}|_{\mathcal{AC}(S)} = 1$. Somit folgt, dass der Abstand in $\mathcal{AC}(S)$ von c zu allen drei Seiten von T höchstens 10 sein kann. Sei ohne Einschränkung y auf der Seite von T , welche den größten Abstand zu c hat. Wir betrachten den Pfad in $\mathcal{AC}(S)$ zwischen c und y und bezeichnen seine Ecken mit $c = v_0, \dots, v_k = y$, wobei $k \leq 9$ gilt. Es gilt $c_1 = \bar{c}$ und aufgrund der Wahl von y gilt außerdem $v_2 = \bar{e}$ oder $v_k = \bar{f}$, ohne Einschränkung nehmen wir ersteres an. Nun wenden wir auf den ganzen Pfad die Abbildung r an und erhalten

$$\begin{aligned}
 |r(c), r(y)|_{\mathcal{C}(S)} &\leq \underbrace{|r(c), r(\bar{c})|_{\mathcal{C}(S)}}_{=|c, \bar{c}|_{\mathcal{C}(S)}=0} + \underbrace{|r(\bar{c}), r(\bar{e})|_{\mathcal{C}(S)}}_{\substack{5.17 \\ \leq 2}} + \underbrace{|r(\bar{e}), r(v_{k-1})|_{\mathcal{C}(S)}}_{\substack{5.17 \\ \leq 2 \cdot 7}} + \underbrace{|r(v_{k-1}), r(y)|_{\mathcal{C}(S)}}_{=|r(v_{k-1}, y)|_{\mathcal{C}(S)} \stackrel{5.18}{\leq} 1} \\
 &\leq 0 + 2 + 2 \cdot 7 + 1 = 17
 \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass der Abstand in $\mathcal{C}(S)$ von c zu $r(y) = y$ höchstens 17 ist. Aufgrund der Wahl von y kann der Abstand von c zu x und zu z nicht größer werden. Somit haben wir eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ gefunden, welche in $\mathcal{C}(S)$ höchstens Abstand 17 zu allen drei Seiten von T haben kann. Es folgt, dass T 17-zentriert an c ist. Da wir T beliebig gewählt hatten, folgt dass $\mathcal{C}(S)$ 17-hyperbolisch ist. In der nachfolgenden Abbildung wird die Situation in $\mathcal{AC}(S)$ dargestellt. Die Bezeichnungen, entlang der Linien, geben die Länge der jeweiligen Pfade in $\mathcal{AC}(S)$ an.

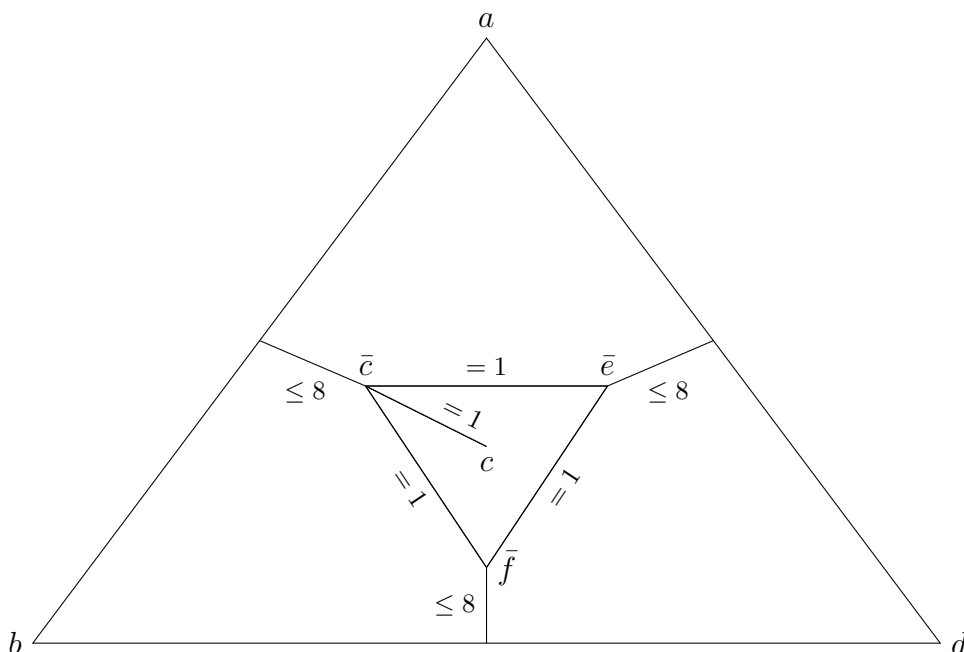


Abbildung 5.9: Die Situation in $\mathcal{AC}(S)$

Sei nun der Rand von S leer. Wir setzen $S' = S \setminus D$, wobei D eine offene Kreisscheibe ist, das heißt, wir entfernen eine offene Kreisscheibe von S , um S' zu erhalten. Sei $i : S' \rightarrow S$ die natürliche Inklusion. Diese induziert eine Abbildung

$$R : \mathcal{C}(S') \rightarrow \mathcal{C}(S) \text{ mit } R([\alpha]_{S'}) = [i(\alpha)]_S,$$

wobei wir mit $[\alpha]_{S'}$ die Homotopieklasse einer einfachen, essentiellen Kurve α in S' meinen und mit $[i(\alpha)]_S$ die Homotopieklasse einer einfachen, essentiellen Kurve $i(\alpha)$ in S meinen.

Es folgt, R ist 1-Lipschitz. Denn für die Homotopieklassen zweier Kurven $[\alpha]_{S'}$ und

$[\beta]_{S'}$ gilt

$$|R([\alpha]_{S'}), R([\beta]_{S'})|_{\mathcal{C}(S)} = |[i(\alpha)]_S, [i(\beta)]_S|_{\mathcal{C}(S)} \underbrace{\leq}_{i \text{ Inklusion}} |[\alpha]_{S'}, [\beta]_{S'}|_{\mathcal{C}(S')}$$

Nun definieren wir uns noch folgende Abbildung

$$S : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathcal{C}(S') \text{ mit } S([\alpha]_S = \begin{cases} [\alpha]_{S'} & \alpha \cap D = \emptyset \\ [\alpha']_{S'} & \alpha \cap D \neq \emptyset \end{cases},$$

wobei α' eine einfache, essentielle Kurve ist, welche man erhält, wenn man α so homotopiert, dass α nicht mehr durch die offene Kreisscheibe D verläuft. Da wir α nur homotopiert haben, ist α' immer noch einfach und essentiell.

Offensichtlich gilt $R \circ S = id_{\mathcal{C}(S)}$.

Sei nun $T = abd$ ein geodätisches Dreieck wie im ersten Fall. Da S eine Einbettung ist, gilt $S(T)$ ist ein geodätisches Dreieck in $\mathcal{C}(S')$. Da S' eine Randkomponente hat, wissen wir nach dem ersten Fall, dass $\mathcal{C}(S')$ 17-hyperbolisch ist. Das heißt, wir finden eine Ecke q in $\mathcal{C}(S')$, deren Abstand zu allen drei Seiten des geodätischen Dreiecks $S(T)$ höchstens 17 ist. Wir bezeichnen die drei Seiten des geodätischen Dreiecks T mit ab, ad, bd und zeigen, dass wir eine Ecke finden, welches höchstens Abstand 17 zu allen drei Seiten hat. Wir betrachten hier nur die Seite ab , für die anderen Seiten erhält man das selbe Ergebnis auf analoge Weise.

$$|R(q), ab|_{\mathcal{C}(S)} = |R(q), ((R \circ S)(a))((R \circ S)(b))|_{\mathcal{C}(S)} \underbrace{\leq}_{R \text{ ist 1-Lipschitz}} |q, S(a)S(b)|_{\mathcal{C}(S')} \leq 17$$

Da $R(q)$ eine Ecke in $\mathcal{C}(S)$ ist, welche höchstens Abstand 17 zu allen drei Seiten des geodätischen Dreiecks T in $\mathcal{C}(S)$ hat, ist T 17-zentriert an $R(q)$. Da wir T beliebig gewählt hatten, folgt, dass $\mathcal{C}(S)$ 17-hyperbolisch ist. \square

Literatur

- [1] I. Kra and B. Maskit. *Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1981.
- [2] Howard A. Masur and Yair N. Minsky. Geometry of the complex of curves i: Hyperbolicity. *Inventiones mathematicae*, 138(1):103–149, Oct 1999.
- [3] Brian H. Bowditch. Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex. *J. Reine Angew. Math.*, 598:105–129, 2006.
- [4] Tarik Aougab. Uniform hyperbolicity of the graphs of curves. *Geom. Topol.*, 17(5):2855–2875, 2013.
- [5] Brian H. Bowditch. Uniform hyperbolicity of the curve graphs. *Pac. J. Math.*, 269(2):269–280, 2014.
- [6] Matt Clay, Kasra Rafi, and Saul Schleimer. Uniform hyperbolicity of the curve graph via surgery sequences. *Algebr. Geom. Topol.*, 14(6):3325–3344, 2014.
- [7] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C. H. Webb. Slim unicorns and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. 2013.
- [8] H.A. Masur and Y.N. Minsky. Geometry of the complex of curves ii: Hierarchical structure. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 10(4):902–974, Nov 2000.
- [9] Joan S. Birman and William W. Menasco *Geom. Dedicata*. The curve complex has dead ends. 2014.
- [10] Nikolai V. Ivanov. Automorphism of complexes of curves and of teichmüller spaces. *International Mathematics Research Notices*, 1997(14):651–666, 1997.
- [11] W. B. R. Lickorish. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 60(4):769–778, 1964.
- [12] L.C. Kinsey. *Topology of Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

- [13] J.M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate texts in mathematics. Springer, 2000.
- [14] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*. Princeton University Press, 2012.
- [15] J. Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Classical Topology and Combinatorial Group Theory. Springer, 1993.
- [16] Sebastian Hensel, Piotr Przytycki, and Richard C. H. Webb. 1-slim triangles and uniform hyperbolicity for arc graphs and curve graphs. 17:755–762, 01 2015.
- [17] Richard Charles Henry Webb. Effective geometry of curve graphs. March 2014.
- [18] TARA E. BRENDLE and L S Childers. Surfaces and their symmetries: an introduction to mapping class groups. 2013.
- [19] C. Löh. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Universitext. Springer International Publishing, 2017.
- [20] M.R. Bridson and A. Häfliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Heidelberg, den 4. Juli 2018