27 Das eingeschränkte Dreikörperproblem* 26.7.

Wir möchten nun das eingeschränkte Dreikörperproblem unter zusätlichen Bedingungen besser verstehen. Es sei dann $m_1 \geq m_2 > 0$ und $m_3 = 0$ und, um die Notation zu vereinfachen, wählen wir $G = 1$. Die Bahnen $t \mapsto \mathbf{r}_1(t)$ und $t \mapsto \mathbf{r}_2(t)$ lösen das Zweikörperproblem und wir annehmen, dass

- die Körper $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ sich in Kreisbahnen bewegen;
- der Körper $\mathbf{r}_3$ sich in der Bewegungsebene von $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ befindet und seine Geschwindigkeit tangent zu solcher Ebene zur Zeit $t = 0$ (äquivalent zu jeder Zeit) ist.

In diesem Fall reden wir von dem *ebenen kreisförmig eingeschränkten Dreikörperproblem.* Wir nehmen an, dass die Körper sich in der xy-Ebene bewegen. Wir nehmen $r_{12} = 1$ als Einheit der Länge und $m_1 + m_2 = 1$ als Einheit der Masse. Wir wählen die Anfangszeit $t = 0$, sodass $\mathbf{r}_1(0) = (-m_2, 0)$ und $\mathbf{r}_2 = ((1 - m_2), 0)$. Nach Aufgabe 22.6 ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$. Daher $\mathbf{r}_1(t) = -m_2 e^{it}$ und $\mathbf{r}_2(t) = (1 - m_2)e^{it}$. Wir möchten nun die Bewegung in einem Koordinatensystem beschreiben, das auch mit Winkelgeschwindigkeit 1 dreht. Wenn $\mathbf{z}_j$ die Ortsvektoren der Körper in den neuen Koordinaten sind, dann $\mathbf{r}_j(t) = e^{it}\mathbf{z}_j$. Nach der Definition $\mathbf{z}_1 = -m_2 \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{z}_2 = 1 - m_2 \in \mathbb{C}$. Also $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$ hängen nicht von der Zeit ab. Wir möchten nun die Gleichung (22.5) für $\mathbf{r}_3$ in eine Gleichung für $\mathbf{z}_3$ umschreiben. Die linke Seite ist

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -e^{it}\mathbf{z}_3 + 2\mathbf{i}e^{it}\dot{\mathbf{z}}_3 + e^{it}\ddot{\mathbf{z}}_3 = e^{it}\big(- \mathbf{z}_3 + 2\mathbf{i}e^{it}\dot{\mathbf{z}}_3 + \ddot{\mathbf{z}}_3\big).$$

Die rechte Seite ist

$$-(1-m_2)\frac{e^{it}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1)}{|e^{it}|^3|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1|^3} - m_2\frac{e^{it}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2)}{|e^{it}|^3|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2|^3} = -e^{it}\Big(\frac{(1-m_2)}{z_{31}}\hat{\mathbf{z}}_{31} + \frac{m_2}{z_{32}}\hat{\mathbf{z}}_{32}\Big)$$

Daher ist (22.5) äquivalent zu

$$\ddot{\mathbf{z}}_3 = -2\mathbf{i}\dot{\mathbf{z}}_3 + \mathbf{z}_3 - \frac{(1-m_2)}{z_{31}^2}\hat{\mathbf{z}}_{31} - \frac{m_2}{z_{32}^2}\hat{\mathbf{z}}_{32}. \tag{27.1}$$

Hier stellt der erste Term die Coriolis-Kraft und der zweite Term die Fliehkraft. Wenn wir die Funktion

$$U_3 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\} \to \mathbb{R}^-, \qquad U_3(\mathbf{z}_3) := -\Big(\frac{1}{2}z_3^2 + \frac{(1-m_2)}{z_{31}} + \frac{m_2}{z_{32}} + \frac{1}{2}m_2(1-m_2)\Big) \tag{27.2}$$

definieren, dann lässt sich (27.1) als

$$\ddot{\mathbf{z}}_3 = -2\mathbf{i}\dot{\mathbf{z}}_3 - \operatorname{grad} U_3(\mathbf{z}_3) \tag{27.3}$$

umschreiben, wobei selbstverständlich den Gradient von U_3 nur bezüglich der Variable $\mathbf{z}_3$ genommen ist. Da die lineare Abbildung $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{i}\mathbf{z}_3$ antisymmetrisch ist, sehen wir, dass die Gleichung (27.3) konservativ ist.

Folgerung 27.1. *Die Energie* $E_3 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *definiert als*

$$E_3(\mathbf{z}_3, \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2} v_3^2 + U_3(\mathbf{z}_3)$$

ist ein erstes Integral für die Gleichung (27.3).

Aufgabe 27.2. *Zeigen Sie, dass die additive Konstante in der Formel für* U_3 *so gewählt ist, dass*

$$-U_3(\mathbf{z}) = (1 - m_2)\Big(\frac{z_{31}^2}{2} + \frac{1}{z_{31}}\Big) + m_2\Big(\frac{z_{32}^2}{2} + \frac{1}{z_{32}}\Big). \tag{27.4}$$

Hinweis: Es ist genug zu zeigen $z_3^2 + m_2(1 - m_2) = (1 - m_2)z_{31}^2 + m_2 z_{32}^2$. *Beweisen Sie diese Gleichung, indem Sie* $\mathbf{z} = (x, y)$ *schreiben.*

Wir möchten nun die kritischen Punkten und die Hillsregionen des Potentialen U_3 bestimmen.

Satz 27.3. *Ein Punkt* $\mathbf{z}_3$ *ist kritisch für* U_3 *genau dann, wenn* $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ *eine zentrale Konfiguration sind. Daher besitzt* U_3 *fünf kritische Punkte:*

- *die eulerschen Punkte* L_1, L_2, L_3, *die kollinear mit* $\mathbf{z}_1$ *und* $\mathbf{z}_2$ *sind. Der Punkt* L_3 *liegt links von* $\mathbf{z}_1$, L_1 *zwischen* $\mathbf{z}_1$ *und* $\mathbf{z}_2$ *(und näher zum leichteren Körper* m_2*) und* L_2 *rechts von* $\mathbf{z}_2$. *Es gilt* $U_3(L_1) \le U_3(L_2) \le U_3(L_3)$ *und die Punkte sind Sättel mit der* x- *und* y-*Achse als Hauptachsen:*

  $$\begin{pmatrix} \partial^2_{xx} U_3(L_i) & \partial^2_{xy} U_3(L_i) \\ \partial^2_{yx} U_3(L_i) & \partial^2_{yy} U_3(L_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

  wobei u_i, v_i *positive reelle Zahlen sind.*

- *die lagrangeschen Punkte* L_4, L_5 *die jeweils ein gleichseitiges Dreieck mit* $\mathbf{z}_1$ *und* $\mathbf{z}_2$ *bilden. Die Punkte* L_4, L_5 *maximieren* U_3 *und* $U_3(L_4) = -\frac{3}{2} = U_3(L_5)$.

Beweis. Aus Aufgabe (4.2) wissen wir, dass $\mathbf{z}_3$ ein kritischer Punkt von U_3 ist genau dann, wenn die konstante Bahn $\mathbf{z}_3$ eine Lösung von (27.3) ist. Da $\mathbf{r}_3 = e^{it}\mathbf{z}_3$, bedeutet das, dass $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ eine ebene homographische Lösung geben. Nach Satz 26.2, bilden die Punkte $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ eine zentrale Konfiguration. Nach Satz 26.3 bekommen wir dann drei kollineare Konfigurationen jeweils für die Massen $0, m_2, 1 - m_2$ (das ist L_3), die Massen $m_2, 0, 1 - m_2$ (das ist L_1) und die Massen $m_2, 1 - m_2, 0$ (das ist L_2). Wir haben hier keine Zeit, die weiteren erwähnten Eigenschaften dieser Punkte zu beweisen.

Die nicht kollineare Lösungen müssen ein gleichseitiges Dreieck bilden mit Scheitel in $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$. Daher ist $z_{31} = 1 = z_{32}$ und wir haben für $\mathbf{z}_3$ nur zwei mögliche Lagen: $L_4 = (1/2 - m_2, \sqrt{3}/2)$ und $L_5 = (1/2 - m_2, -\sqrt{3}/2)$. Wir zeigen nun, dass L_4, L_5 die Funktion U_3 maximieren. Dank der Formel 27.4 genügt es zu zeigen, dass 1 die Funktion $r \mapsto \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r}$ für $r \in \mathbb{R}^+$ minimiert. Das ist klar, weil die Ableitung der Funktion genau für $r = 1$ verschwindet und wir haben

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} = +\infty, \qquad \lim_{r \to +\infty} \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} = +\infty. \qquad \square$$

Folgerung 27.4. *Wenn $m_1 > m_2$ besitzt die Hillsregion $U_3^{\leq h} = \{U_3 \leq h\}$ mit $h \in \mathbb{R}$ die folgenden zusammenhängenden Komponenten:*

- *Für $h < U_3(L_1)$ eine beschränkte Komponente K_1 um $\mathbf{z}_1$, eine beschränkte Komponente K_2 um $\mathbf{z}_2$ und eine unbeschränkte Komponente K_∞. Die Mengen $K_1 \cup \{\mathbf{z}_1\}$, $K_2 \cup \{\mathbf{z}_2\}$ und $\mathbb{C} \setminus K_\infty$ sind homöomorph zu Scheiben.*

- *Für $U_3(L_1) < h < U_3(L_2)$ eine beschränkte Komponente K_{12} um $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$ und eine unbeschränkte Komponente K_∞. Die Mengen $K_{12} \cup \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ und $\mathbb{C} \setminus K_\infty$ sind homöomorph zu Scheiben.*

- *Für $U_3(L_2) < h < U_3(L_3)$ eine unbeschränkte Komponente $K_{12\infty}$ um $\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$. Die Menge $\mathbb{C} \setminus K_{12\infty}$ ist homöomorph zu einer Scheibe, die die reelle Achse in einem Intervall schneidet.*

- *Für $U_3(L_3) < h < -3/2$ eine unbeschränkte Komponente $K_{12\infty}$ um $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$, die die ganze reelle Achse enthält. Die Menge $\mathbb{C} \setminus K_{12\infty}$ hat zwei Komponenten, die homöomorph zu Scheiben sind.*

Beweis. Wir geben hier nur eine Idee des Beweises, die die Morse Theorie benutzt. Wir denken an h als ein Parameter die von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Dann benutzen wir das Prinzip, dass die Hillsregionen $U_3^{\leq h}$ homöomorph bleiben bislang h keinen der kritischen Werten $U_3(L_i)$ trifft. Dasselbe gilt für ihr Komplement $U_3^{>h} = \mathbb{C} \setminus U_3^{\leq h}$.

Für $\mathbf{z}$ in einer kleinen Umgebung von $\mathbf{z}_i$ ist $U_3(\mathbf{z})$ ungefähr m_i/z_{3i} und für $\mathbf{z}$ in einer Umgebung von ∞ ist $U_3(\mathbf{z})$ ungefähr $\frac{1}{2}z_3^2$. Also, wenn h sehr negativ ist $U_3^{\leq h}$ die Vereinigung von kleinen Störungen der Hillsregionen dieser drei Funktionen. Deshalb besitzt $U_3^{\leq h}$ für $h < U_3(L_1)$ die behauptete Gestalt. Da L_4 und L_5 Maxima sind, ist $U_3^{>h}$ die Vereinigung zwei kleine Scheiben um L_4 und L_5 für $h = -3/2 - \epsilon$. Das zeigt die Behauptung für $U_3(L_3) < h < -3/2$. Die Behauptung für die übrigen zwei Intervalle folgt es aus der Tatsache, dass L_1, L_2, L_3 Sattelpunkte für U_3 sind und dass wir in einer Umgebung solcher Punkte die Aufgabe 4.5 benutzen können. □

Wir wissen, dass kritische Punkten des Potentialen konstante Bahnen ergeben. Die naturelle Frage in diesem Zusammenhang ist zu verstehen, ob diese Punkte stabil oder instabil für die Dynamik sind, nämlich ob Bahnen mit geringer Geschwindigkeit, die sich in einer kleinen Umgebung des kritischen Punkt befinden, werden in der nähe des Punktes für alle Zeiten bleiben.

Satz 27.5. *Die Punkte L_1, L_2, L_3 sind immer instabil. Die Punkte L_4, L_5 sind stabil, wenn $27m_2(1 - m_2) < 1$ und m_2 nicht gleich ein von drei Ausnahmewerten ist.* □

Aufgabe 27.6. *Wir betrachten hier das Sitnikov-Problem. Das ist ein eingeschränktes Dreikörperproblem, wobei $m_1 = m_2 = 1/2$, die Primärkorper sich auf der xy-Ebene bewegen und der Satellit $\mathbf{r}_3$ zur Anfangszeit auf der z-Achse mit einer Geschwindigkeit parallel zu der z-Richtung ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{r}_3(t) = (0, 0, r_3(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Das heißt, dass* *der Satellit bleibt für jede Zeit auf der z-Achse. Bestimmen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung für r_3 als Funktion von $r(t)$, dem Abstand der Primärkörper von $\mathbf{0}$. Es sei nun angenommen, dass die Primärkörper einer Kreisbahn mit Radius r folgen. Zeigen Sie, dass die Gleichung für r_3 konservativ ist und bestimmen Sie das zugehörige Potential. Für welche Werte der Energie ist die Bewegung des Satelliten beschränkt?*