3 Gewöhnliche Differentialgleichungen 23.4.

3.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

3.1.1 Fundamentalsätze

Definition 3.1. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Vektorfunktion. Eine Kurve $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \tag{3.1}$$

wenn $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. In diesem Fall heißt $\mathbf{x}$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$. Wir nennen Ω den Phasenraum, die Punkte $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ Phasen und die Funktion $\mathbf{V}$ ein Vektorfeld.

Aufgabe 3.2. *Es sei $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld. Es sei $\mathbf{x}_0$ ein Punkt in Ω und $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \Omega$ eine konstante Kurve $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0$. Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen auf $\mathbf{x}_0$, so dass $\mathbf{x}$ eine Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ ist.*

Satz* (Transformationsregel für Vektorfelder)**.** *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld und $\mathbf{X} : \Omega' \to \Omega$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{d}_{\mathbf{x}'}\mathbf{X} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ invertierbar für alle $\mathbf{x}' \in \Omega'$ ist. Es sei dann $\mathbf{V}' : \Omega' \to \mathbb{R}^d$ das Vektorfeld*

$$\mathbf{V}'(\mathbf{x}') := \Big(\mathrm{d}_{\mathbf{x}'}\mathbf{X}\Big)^{-1} \cdot \mathbf{V}\big(\mathbf{X}(\mathbf{x}')\big). \tag{3.2}$$

Wenn $\mathbf{x}' : I \to \Omega'$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}'$ (mit Anfang $\mathbf{x}'_0 \in \Omega'$ zur Zeit t_0) ist, gibt $\mathbf{x} := \mathbf{X} \circ \mathbf{x}' : I \to \Omega$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ (mit Anfang $\mathbf{x}_0 := \mathbf{X}(\mathbf{x}'_0)$ zur Zeit t_0). □

Aufgabe*. *Es sei $\mathbf{p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ die Polarkoordinatenabbildung, die im Abschnitt 2.2.1 eingeführt wurde. Schreiben Sie die transformierten Vektorfelder für die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2_\times \cong \mathbb{C}^2 \setminus \mathbf{0}$:*

$$\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{z}.$$

Aufgabe 3.3. *Es sei $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ und für jede $t_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die Kurve mit Parametrisierung $\mathbf{x}' : (a + t_0, b + t_0) \to \Omega$, die als $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t - t_0)$ definiert ist. Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{x}'$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ ist.*

Definition 3.4. Es seien $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir sagen, dass $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ eine Integralkurve von $\mathbf{V}$ mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0 ist, falls $a < t_0 < b$ und $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ zusätzlich gelten.

Satz 3.5 (Lokal eindeutig Lösbarkeit)**.** *Für alle Punkte $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ existiert eine Lösung $\mathbf{x} : (a, b) \to \Omega$ von (3.1) mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0. Wenn $\mathbf{x}' : (a', b') \to U$ eine andere Lösung mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0 ist, dann $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}'(t)$ für alle t im Intervall $(a, b) \cap (a', b')$.* □

Aufgabe 3.6. *Es sei* $\mathbf{x} : (a,b) \to \Omega$ *eine Lösung mit Anfang* $\mathbf{x}_0$ *zur Zeit* t_0*. Es seien* $t_1 \in (a,b)$ *und* $\mathbf{x}' : (a',b') \to \Omega$ *eine Lösung mit Anfang* $\mathbf{x}(t_1)$ *zur Zeit* 0*. Zeigen Sie, dass es eine Lösung* $\mathbf{x}'' : (a,b) \cup (a'+t_1, b'+t_1) \to \Omega$ *mit Anfang* $\mathbf{x}_0$ *zur Zeit* t_0 *existiert.*

Lösung. Wir definieren

$$\mathbf{x}''(t) = \begin{cases} \mathbf{x}(t) & \forall\, t \in (a,b), \\ \mathbf{x}'(t-t_1) & \forall\, t \in (a'+t_1, b'+t_1). \end{cases}$$

Die Kurve $\mathbf{x}''$ ist wohl definiert, wenn die zwei Definitionen über die Schnittmenge $(a,b) \cap (a'+t_1, b'+t_1)$ übereinstimmen. Da $0 \in (a',b')$ ist, folgt $t_1 \in (a'+t_1, b'+t_1)$ und $\mathbf{x}'(t_1-t_1) = \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}(t_1)$. Da $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ und $t \mapsto \mathbf{x}'(t-t_1)$ beide Lösungen mit gleichem Anfang zur Zeit t_1 sind, leiten wir aus Satz 3.5 her, dass $\mathbf{x}'(t-t_1) = \mathbf{x}(t)$ für alle $t \in (a,b) \cap (a'+t_1, b'+t_1)$. □

Satz 3.7 (Maximale Lösungen sind eindeutig)**.** *Für alle* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ *existiert eindeutig eine maximale Lösung* $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0} : I_{\mathbf{x}_0} \to \mathbb{R}$ *von* (3.1) *mit Anfang* $\mathbf{x}_0$ *zur Zeit* 0*, wobei* $I_{\mathbf{x}_0} \subset \mathbb{R}$ *ein offenes (möglicherweise auf einer oder beiden Seiten unendliches) Intervall ist. Das heißt, dass* $I \subset I_{\mathbf{x}_0}$ *für alle Lösungen* $\mathbf{x} : I \to \Omega$ *der obigen DG mit Anfang* $\mathbf{x}_0$ *zur Zeit* 0 *gilt.* □

Aufgabe 3.8. *Bestimmen Sie die maximale Lösung von* $\dot{x} = 1 + x^2$ *mit Anfang einem beliebigen* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Was ist* I_{x_0}*?*

Wann ist dann $I_{\mathbf{x}_0}$ endlich oder unendlich? Die folgenden zwei Sätze geben eine Antwort zu dieser Frage.

Satz 3.9 (Lösungen von endlicher Lebensdauer verlassen jede kompakte Menge)**.** *Es sei angenommen, dass* $\sup I_{\mathbf{x}_0} < +\infty$*. Dann, für alle kompakten Teilmengen* K *von* Ω *gibt es* $t_K \in I_{\mathbf{x}_0}$ *so, dass* $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \notin K$ *für alle* $t \in (t_K, \sup I_{\mathbf{x}_0})$*. Eine ähnliche Aussage gilt, wenn* $\inf I_{\mathbf{x}_0} > -\infty$*.* □

Satz 3.10 (Minimale Zeit für das Verlassen eines Balls)**.** *Es sei angenommen, dass der abgeschlossene Ball* $\bar{B}_a(\mathbf{x}_0)$ *mit Mittelpunkt* $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ *und Radius* $a > 0$ *in* Ω *enthalten ist. Dann gilt*

$$I_{\mathbf{x}_0} \supset [-\delta, \delta], \qquad \delta := \frac{a}{\max\limits_{\mathbf{x} \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)} |\mathbf{V}(\mathbf{x})|} \in (0, +\infty].$$

Beweis. Wenn $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)$ für alle $t \in I_{\mathbf{x}_0} \cap [0,+\infty)$ dann $[0,+\infty) \subset I_{\mathbf{x}_0}$ nach Satz (3.9). Es sei dann angenommen, dass

$$T := \inf\left\{t \in I_{\mathbf{x}_0} \cap [0,+\infty) \mid \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \notin \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)\right\} \in I_{\mathbf{x}_0} \cap (0,+\infty).$$

Dann $|\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(T) - \mathbf{x}_0| = a$ und $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)$ für jede $t \in [0,T]$. Nach dem Fundamentalsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} a = |\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(T) - \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(0)| = \left|\int_0^T \dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}_0}(t)\mathrm{d}t\right| \le \int_0^T |\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{x}_0}(t)|\mathrm{d}t = \int_0^T \big|\mathbf{V}(\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t))\big|\mathrm{d}t \\ \le T \max_{\mathbf{x} \in \bar{B}_a(\mathbf{x}_0)} |\mathbf{V}(\mathbf{x})|. \end{aligned}$$ □

3.1.2 Invariante Mengen

Von zentraler Bedeutung in der Unstersuchung von einer Differentialgleichung sind ihre invarianten Mengen.

Definition 3.11. Wir sagen, dass $M \subset \Omega$ eine invariante Menge für die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ ist, wenn $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t) \in M$ für alle $\mathbf{x}_0 \in M$ und alle $t \in I_{\mathbf{x}_0}$ gilt.

Satz 3.12. *Es sei M eine invariante Menge für $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:*

$$(i)\ \ \forall\, \mathbf{x}_0 \in M, \quad I_{\mathbf{x}_0} = \mathbb{R}, \qquad (ii)\ \ \exists\, \delta_M > 0,\ \forall\, \mathbf{x}_0 \in M, \quad I_{\mathbf{x}_0} \supset (-\delta_M, \delta_M).$$

Beweis. Wir zeigen durch Widerspruch, dass (i) eine Folgerung von (ii) ist. Es sei dann angenommen, dass es $\mathbf{x}_0 \in M$ existiert mit $\sup I_{\mathbf{x}_0} < +\infty$ (der Fall $\inf I_{\mathbf{x}_0} > -\infty$ ist ähnlich). Es sei $t_1 \in I_{\mathbf{x}_0}$ mit

$$t_1 > \sup I_{\mathbf{x}_0} - \delta_M$$

und setze man $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}(t_1)$. Wir wenden Aufgabe (3.6) mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}$ und $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\mathbf{x}_1}$ an und gewinnen eine Lösung $\mathbf{x}'' : I_{\mathbf{x}_0} \cup (I_{\mathbf{x}_1} + t_1) \to \Omega$ mit Anfang $\mathbf{x}_0$ zur Zeit 0. Da M invariant ist, folgt es, dass $\mathbf{x}_1 \in M$ und daher

$$I_{\mathbf{x}_1} + t_1 \supset [-\delta_M + t_1, \delta_M + t_1].$$

Aber $\delta_M + t_1 > \sup I_{\mathbf{x}_0}$ impliziert, dass $\sup\big(I_{\mathbf{x}_0} \cup (I_{\mathbf{x}_1} + t_1)\big) > \sup I_{\mathbf{x}_0}$. Diese letzte Ungleichung widerspricht die Maximalität von $\mathbf{x}_{\mathbf{x}_0}$. □

Definition 3.13. Eine Vektorfunktion $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{d'}$ heißt erstes Integral (oder Konstante der Bewegung), wenn für alle Integralkurven $\mathbf{x} : I \to \Omega$ von $\mathbf{V}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})}{\mathrm{d}t}(t) = 0, \qquad \forall\, t \in I. \tag{3.3}$$

Das heißt, dass $\mathbf{f}$ konstant entlang der Integralkurven von $\mathbf{V}$ ist oder auch dass die Menge $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}) \subset \Omega$ invariant für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d'}$ ist.

Satz 3.14. *Eine Vektorfunktion $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{d'}$ ist ein erstes Integral für $\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ genau dann, wenn*

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\mathbf{f} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega. \tag{3.4}$$

Wenn $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{d'})$ lässt sich diese Bedingung als

$$\langle \operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}), \mathbf{V}(\mathbf{x}) \rangle = 0, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, d'. \tag{3.5}$$

schreiben.

Beweis. Nach der Kettenregel und die Gleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$ ist die Bedingung 3.3 gleichbedeutend mit $\langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) \rangle = 0$ für alle $t \in I$. Da für alle $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ gibt es eine Lösung von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}(\mathbf{x})$, die durch $\mathbf{x}_0$ läuft, die äquivalenz zwischen (3.3) und (3.4) folgt. □

Aufgabe 3.15. *Es sei $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert als $\mathbf{V}(x, y) = (-y, x)$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathbf{V}$. Besitzt das Vektorfeld ein erstes Integral? Schreiben Sie eine explizite Lösung mit beliebigem Anfang in der komplexen Notation.*

3.2 Gleichungen zweiter Ordnung

Definition 3.16. Es sei $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Menge des $\mathbb{R}^k$ und $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine Vektorfunktion, die wir *Kraft* nennen. Eine Kurve $\mathbf{r} : (a, b) \to \mathscr{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \tag{3.6}$$

wenn $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ für alle $t \in (a, b)$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch, dass der Körper $\mathbf{r}$ sich unter die Kraft $\mathbf{F}$ bewegt. Es seien nun $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$ und $t_0 \in (a, b)$ gegeben. Wenn $0 \in I$ und $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\ddot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ zusätzlich gelten, sagen wir, dass $\mathbf{r}$ Anfangspunkt $\mathbf{r}_0 \in \mathscr{R}$ und Anfangstangentenvektor $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^k$ zur Zeit t_0 besitzt.

Satz* (Transformationsregel für Kräfte)**.** *Es sei $\mathscr{R} \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\mathbf{F} : \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine Vektorfunktion und $\mathbf{R} : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{d}_{\mathbf{r}'}\mathbf{R} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ für alle $\mathbf{r}' \in \mathscr{R}'$ invertierbar ist. Es sei dann $\mathbf{F}' : \mathscr{R}' \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ die Vektorfunktion*

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}', \mathbf{v}') := \Big(\mathrm{d}_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}\Big)^{-1} \cdot \Big(\mathbf{F}\big(\mathbf{R}(\mathbf{r}'), \mathrm{d}_{\mathbf{r}'}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}'\big) - \mathrm{d}^2_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}[\mathbf{v}', \mathbf{v}']\Big), \tag{3.7}$$

wobei die i-te Koordinate von $\mathrm{d}^2_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}[\mathbf{v}', \mathbf{v}'] \in \mathbb{R}^k$ die Zahl

$$\mathrm{d}^2_{\mathbf{r}'}\mathbf{R}^i[\mathbf{v}', \mathbf{v}'] := \sum_{j,\ell=1}^{k} \frac{\partial^2 \mathbf{R}^i}{\partial r'_j \partial r'_\ell}(\mathbf{r}')v'_j v'_\ell.$$

ist. Wenn ein Körper $\mathbf{r}' : I \to \mathscr{R}'$ sich unter der Kraft $\mathbf{F}'$ (mit Anfang $(\mathbf{r}'_0, \mathbf{v}'_0) \in \mathscr{R}' \times \mathbb{R}^k$) bewegt, bewegt sich dann der Körper $\mathbf{r} := \mathbf{R} \circ \mathbf{r}' : I \to \mathscr{R}$ unter der Kraft $\mathbf{F}$ (mit Anfang $(\mathbf{R}(\mathbf{r}'_0), \mathrm{d}_{\mathbf{r}'_0}\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}'_0) \in \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$).

Aufgabe*. *Es sei $\mathbf{p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ die Polarkoordinatenabbildung, die in Aufgabe 2.2.1 eingeführt wurde. Schreiben Sie die transformierte Kraft für die folgenden Kräfte auf $\mathbb{R}^2_\times$:*

$$\hat{\mathbf{z}}, \qquad \mathbf{i} \cdot \mathbf{z}.$$

Aufgabe 3.17. *Es sei $\mathbf{r} : (a, b) \to \mathscr{R}$ eine Lösung von $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, also die Kraft $\mathbf{F}$ hängt nicht von $\dot{\mathbf{r}}$ ab. Für jede $t_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die Kurven $\mathbf{r}' : (a + t_0, b + t_0) \to \mathscr{R}$ und $\mathbf{r}'' : (-a + t_0, -b + t_0) \to \mathscr{R}$, die als $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t - t_0)$ und $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{r}(-t - t_0)$ definiert sind. Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{r}'$ und $\mathbf{r}''$ sich unter der Kraft $\mathbf{F}$ bewegen.*

Satz 3.18. *Ein Körper $\mathbf{r} : I \to \mathscr{R}$ bewegt sich unter der Kraft $\mathbf{F}$ genau dann, wenn $\mathbf{x} := (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) : I \to \Omega := \mathscr{R} \times \mathbb{R}^k$, eine Integralkurve des folgenden Vektorfelds ist:*

$$\mathbf{V} : \Omega \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k, \qquad \mathbf{V}\begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix} \qquad \forall\, (\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \Omega.$$

Beweis. Es sei $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) : I \to \Omega$ eine Kurve. Die Gleichung $(\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{V}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ kann man als ein System $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ umschreiben. Dieses System ist äquivalent zum System $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, wie gewünscht. □

Mit Hilfe von Satz 3.18 kann man die Resultate aus den Sätzen 3.5, 3.7, 3.9, 3.12 und die Definition von ersten Integralen zu den Gleichungen zweiter Ordnung entsprechend anpassen.

Aufgabe 3.19. *Finden Sie alle maximale Lösungen der Gleichung* $\ddot{r} = \frac{1}{2}\dot{r}^3$*,* $r \in \mathbb{R}$*. Zeigen Sie, dass* $\sup I_{(r_0,v_0)} < +\infty$*, falls* $(r_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$*. In diesem Fall finden Sie eine kompakte Menge* $K_{(r_0,v_0)} \subset \mathbb{R}$ *und eine Folge* $t_i \to \sup I_{(r_0,v_0)}$*, sodass* $r_{(r_0,v_0)}(t_i) \in K_{(r_0,v_0)}$*. Wiederspricht dieses Beispiel Satz* 3.9*? Was ist der Limes der Folge* $\dot{r}_{(r_0,v_0)}(t_i)$*?*