2 Wiederholung der gewünschten Vorkenntnisse 19.4.

Wir schreiben $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ für die Menge der positiven reellen Zahlen.

2.1 Linearalgebra

Wenn $d \in \mathbb{N}$, schreiben wir die Elementen

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

mit Fettschrift. Wir schreiben $\mathbf{0}$ für den Nullvektor und benutzen die Abkürzung

$$\mathbb{R}^d_\times := \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Die spitzen Klammern bezeichnen das euklidische Skalarprodukt zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{w}$:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{d} u_i w_i.$$

Die euklidische Norm von $\mathbf{u}$ schreiben wir als

$$u := |\mathbf{u}| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle},$$

die Einheitssphäre als

$$S^{d-1} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; u = 1 \right\}.$$

und den offenen Ball um $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^d$ mit radius $a > 0$ als

$$B_a(\mathbf{u}_0) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0| < a \right\}.$$

Wenn $\mathbf{u}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^d_\times$ ist, schreiben wir

$$\hat{\mathbf{u}} := \frac{\mathbf{u}}{u} \in S^{d-1}$$

für seine Normierung. Wir kennzeichnen als $O(d)$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen, nämlich der Matrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{d^2}$, die das Skalarprodukt erhalten:

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle.$$

Die Untergruppe von $O(d)$, deren Elemente positive Determinante haben, schreiben wir als $SO(d)$. Wir kennzeichnen mit $A(d)$ den Vektorraum der antisymmetrischen Matrizen, nämlich der Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d^2}$, für die

$$\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, \quad \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{w} \rangle.$$

Wenn $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, also $d = 3$, schreiben wir das Kreuzprodukt der beiden Vektoren als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u_2 w_3 - u_3 w_2 \\ u_3 w_1 - u_1 w_3 \\ u_1 w_2 - u_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Es gilt die Formel

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle, \qquad \forall\, \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Für $d = 2k$ identifizieren wir $\mathbb{R}^{2k}$ mit dem Raum $\mathbb{C}^k$ der vektoren mit k complexen Koordinaten durch die Abbildung

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \mathbf{i} \\ \vdots \\ u_{2k-1} + u_{2k} \mathbf{i} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit darstellt. Besonders wichtig für uns werden die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ sein.

Aufgabe 2.1. *Wir betrachten $\mathbb{C}$ als die Teilmenge $\mathbb{R}^2 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$. Dann*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} \times \mathbf{z} = u\, \mathbf{i} \cdot \mathbf{z} \in \mathbb{C}, \qquad \forall\, u \in \mathbb{R},\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}.$$

2.2 Vektoranalysis

Alle die von uns betrachteten Abbildungen $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{d_2}$, wobei Ω eine offene Teilmenge der $\mathbb{R}^{d_1}$ ist und $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, sind als glatt zu verstehen (d.h. unendlich differenzierbar). Insbesondere schreiben wir die erste Ableitung (das totale Differential) von $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_{d_2})$ im Punkt $\mathbf{x}_0$ als $\mathrm{d}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f} : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$, wobei

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}_0}\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & & \cdots & & \frac{\partial f_1}{\partial x_{d_1}}(\mathbf{x}_0) \\ & \ddots & & \iddots & \\ \vdots & & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) & & \vdots \\ & \iddots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_{d_2}}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & & \cdots & & \frac{\partial f_{d_2}}{\partial x_{d_1}}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{d_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_2}, \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d_1}.$$

Wir sagen, dass $\mathbf{f}$ ein Diffeomorphismus ist, wenn ihre Bildmenge $\Omega' := \mathbf{f}(\Omega)$ offen ist und es eine glatte Umkehrabbildung $\mathbf{f}^{-1} : \Omega' \to \Omega$ gibt (in diesem Fall muss $d_1 = d_2$ sein).

Wenn $d_2 = 1$, also $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion ist, schreiben wir ihren Gradient in $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ als

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{d_1}}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_1},$$

sodass $\mathrm{d}_{\mathbf{x}_0} f \cdot \mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{u} \rangle$ für alle $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{d_1}$ gilt.

Aufgabe 2.2. *Es sei $f : \mathbb{R}^d_\times \to \mathbb{R}^+$ die Funktion $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$, die der Abstand zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{0}$ darstellt. Beweisen Sie, dass*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d_\times$$

und skizzieren Sie dieses Vektorfeld.

Umgekehrt, wenn $d_1 = 1$ und $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, definiert die Vektorfunktion eine Kurve. Eine Kurve ist nähmlich eine Abbildung $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^d$, die von einem Zeitparameter $t \in I$ parametrisiert ist, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist. Wir kennzeichnen die Zeitableitungen von $\mathbf{x}$ mit Punkten über dem Buchstabe $\mathbf{x}$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ldots$$

Insbesondere heißt $\dot{\mathbf{x}}(t)$ der Tangentenvektor der Kurve $\mathbf{x}$ zur Zeit t (oder im Punkt $\mathbf{x}(t)$).

2.2.1 Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

Es sei $\mathbf{p} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ die Abbildung

$$\mathbf{p}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = re^{i\theta}.$$

Nach Identifizierung einer linearen Abbildung mit ihrer darstellenden Matrix haben wir

$$\mathrm{d}_{\mathbf{r}_0}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta. \end{pmatrix}$$

Also ist die Abbildung $\mathbf{p}$ ein lokaler Diffeomorphismus, der nicht global invertierbar ist, weil $\mathbf{p}(r, \theta) = \mathbf{p}(r', \theta')$ die Bedingungen $r = r'$ und $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$ impliziert. Etwa genauer ist $\mathbf{p}$ eine Überdeckung. Daraus folgt, dass für jede Kurve $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2_\times$ eine Kurve $(r, \theta) : I \to \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}\big(r(t), \theta(t)\big), \qquad \forall\, t \in I.$$

Satz 2.3. *Es sei* $(x, y) : I \to \mathbb{R}^2_\times$ *eine beliebige Kurve mit* $\dot{\theta} > 0$*. Für jedes Zeitintervall* $[t_1, t_2] \subset I$ *mit* $\theta(t_2) - \theta(t_1) < 2\pi$ *definiere man*

$$\Omega_{t_1,t_2} := \Big\{ s\mathbf{r}(t) \;\Big|\; s \in [0,1],\ t \in [t_0, t_1] \Big\}.$$

Der Flächeinhalt von D *ist durch die folgende Formel gegeben:*

$$\mathrm{Area}(\Omega_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2(t)\dot{\theta}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Da $t \mapsto \theta(t)$ monoton wachsend ist, gibt es ein Intervall $[\theta_1, \theta_2] \subset \mathbb{R}$, sodass $\theta : [t_1, t_2] \to [\theta_1, \theta_2]$ ein Diffeomorphismus mit $\theta(t_1) = \theta_1$ und $\theta(t_2) = \theta_2$ ist. Es sei $t : [\theta_1, \theta_2] \to [t_1, t_2]$ die Umkehrfunktion. Dann gilt

$$\Omega_{t_1,t_2} = \mathbf{p}(\Omega'_{t_1,t_2}), \qquad \Omega'_{t_1,t_2} = \Big\{ (r, \theta) \;\Big|\; \theta \in [\theta_1, \theta_2],\ r \in (0, r(t(\theta))] \Big\}$$

Durch zwei Anwendungen der Koordinatenwechselformel für Integrale bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\Omega_{t_1,t_2}) = \int_{\Omega'_{t_1,t_2}} |\det \mathrm{d}\mathbf{p}|\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_0^{r(t(\theta))} r\mathrm{d}r \Big) \mathrm{d}\theta &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2(t(\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} r^2(t)\dot{\theta}(t)\,\mathrm{d}t. \qquad \square\end{aligned}$$