

16 Inversionen: der Hauptsatz

18.6.

Es wird für uns am wichtigsten zu verstehen, wohin die Ebenen und die Sphären durch Inversionen abgebildet werden. Die Situation wird in dem unten stehenden Hauptsatz über Inversionen geklärt.

Satz 16.1. *Die Abbildung $I_*^\pm : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ bildet*

- (a) *jede (erweiterte) k -Ebene α durch \mathbf{M}_* in sich selbst ab;*
- (b) *jede (erweiterte) k -Ebene α disjunkt von \mathbf{M}_* auf eine k -Sphäre $\mathcal{S} := I_*^\pm(\alpha)$ durch \mathbf{M}_* ab und umgekehrt. Wenn α' die $(k+1)$ -Ebene, die α und \mathbf{M}_* enthält, ist, sodass, die Gleichungen $\alpha = \{\mathbf{x} \in \alpha' \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{M}_*, \mathbf{u} \rangle = d\}$ und $\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \alpha' \mid |\mathbf{x} - \mathbf{M}| = |\mathbf{M}_* - \mathbf{M}|\}$ für irgendwelche $\mathbf{u} \in S^{n-1} \cap \alpha'$, $d > 0$ und $\mathbf{M} \in \alpha'$ gelten, dann*

$$|\mathbf{M} - \mathbf{M}_*| = \frac{\rho_*^2}{2d}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_* \pm \frac{\rho_*^2}{2d} \mathbf{u}; \quad (16.1)$$

- (c) *jede k -Sphäre \mathcal{S} disjunkt von \mathbf{M} auf eine k -Sphäre $\mathcal{S}' := I_*^\pm(\mathcal{S})$ disjunkt von \mathbf{M} ab. Wenn die Sphäre \mathcal{S} radial bezüglich \mathbf{M}_* ist, dann*

$$\mathcal{S}' = \pm \frac{\rho_*^2}{\text{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)} (\mathcal{S} - \mathbf{M}_*) + \mathbf{M}_*. \quad (16.2)$$

Wir bekommen nämlich die Sphäre \mathcal{S}' durch eine Streckung mit Zentrum \mathbf{M}_ und Faktor $\pm \rho_*^2 / \text{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)$.*

Das Vorzeichen $+$ (bzw. $-$) in den Formeln (16.1) und (16.2) ist mit I_^+ (bzw. I_*^-) zu nehmen.*

Beweis. Wir durchführen den Beweis nur für die positive Inversion. Die Leser können dann die Argumente zu der negativen Inversion anpassen. Es sei α eine erweiterte k -Ebene mit $\mathbf{M}_* \in \alpha$. Für alle $\mathbf{x} \in \alpha$ gehört der Punkt $I_*^+(\mathbf{x})$ auf der Gerade durch \mathbf{M}_* und \mathbf{x} . Diese Gerade ist in α enthält, weil α ein affiner Raum ist. Das zeigt (a).

Es sei nun α eine erweiterte k -Ebene mit $\mathbf{M}_* \notin \alpha$ und schreiben wir α' für die erweiterte $(k+1)$ -Ebene die \mathbf{M}_* und α enthält. Nach (a) können wir die Inversion auf α' einschränken. Das heißt, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha' = \bar{\mathbb{R}}^n$ gilt und $k = n - 1$. In diesem Fall gibt es $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ und $d > 0$, so, dass $\mathbf{x} \in \alpha$ genau dann, wenn $\langle \mathbf{x} - \mathbf{M}_*, \mathbf{u} \rangle = d$. Wir müssen jetzt das Bild $I_*^+(\alpha)$ bestimmen. Erstens bemerken wir, dass $\mathbf{M}_* = I_*^+(\infty) \in I_*^+(\alpha)$. Dann sei $\mathbf{P} = \mathbf{M}_* + d\mathbf{u} \in \alpha$ der Punkt auf α mit minimalem Abstand zu \mathbf{M}_* . Wir haben

$$I_*^+(\mathbf{P}) = \mathbf{M}_* + \frac{\rho_*^2}{d} \mathbf{u}. \quad (16.3)$$

Es sei nun $\mathbf{x} \in \alpha$ mit $\mathbf{x} \neq \infty$ und $\mathbf{x} \neq \mathbf{P}$. Wir behaupten, dass die Dreiecke $\Delta(\mathbf{xPM}_*)$ und $\Delta(I_*^+(\mathbf{P})I_*^+(\mathbf{x})\mathbf{M}_*)$ ähnlich sind. Sie besitzen einen gemeinsamen Winkel mit Scheitel \mathbf{M}_* und außerdem nach (15.1) und (16.3)

$$\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{M}_*|}{|\mathbf{P} - \mathbf{M}_*|} = \frac{\rho_*^2}{d|I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*|} = \frac{|\mathbf{P} - \mathbf{M}_*|}{|I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*|}.$$

Es folgt daraus, dass $\Delta(I_*^+(\mathbf{P})I_*^+(\mathbf{x})\mathbf{M}_*)$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, wobei die Hypotenuse $I_*^+(\mathbf{P})\mathbf{M}_*$ ist. Nach dem Satz von Thales liegt $I_*^+(\mathbf{x})$ auf der $(n-1)$ -Sphäre \mathcal{S} mit Mittelpunkt $\mathbf{M} = \mathbf{M}_* + \frac{\rho_*^2}{2d}\mathbf{u}$. Umgekehrt ist jeder Punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{M}_*\}$ das Bild von $\mathbf{x} \in \alpha$, wobei \mathbf{x} der einzige Schnittpunkt zwischen α und der Gerade durch \mathbf{y} und \mathbf{M}_* ist. Es bleibt zu zeigen, dass alle möglichen $(n-1)$ -Sphären \mathcal{S} das Bild von irgendwelcher α sind. Nach Gleichung (16.1) hat die gewünschte α

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{M} - \mathbf{M}_*}{|\mathbf{M} - \mathbf{M}_*|}, \quad d = \frac{\rho_*^2}{2|\mathbf{M} - \mathbf{M}_*|}.$$

Wir zeigen nun (c). Es sei α die $(k+1)$ -Ebene, die \mathcal{S} enthält. Erstens nehmen wir an, dass $\mathbf{M}_* \in \alpha$. In diesem Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k = n-1$ betrachten. Es sei $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ und nehme man die Gerade durch \mathbf{M}_* und \mathbf{x} . Es sei \mathbf{x}' der weitere Schnittpunkt zwischen dieser Gerade und \mathcal{S} . Nach dem Hilfsatz 13.7 und der Formel (15.1) bekommen wir

$$|I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_*| = \frac{\rho_*^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{M}_*|} = \frac{\rho_*^2}{|\text{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)|} |\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*|.$$

Die Halbgerade $\mathbf{M}_* + \mathbb{R}^+(\mathbf{x} - \mathbf{M}_*)$ enthält $I_*^+(\mathbf{x})$ und enthält \mathbf{x}' genau dann, wenn die Potenz positiv ist. Es folgt daraus, dass

$$I_*^+(\mathbf{x}) - \mathbf{M}_* = \frac{\rho_*^2}{\text{Pot}_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}_*)} (\mathbf{x}' - \mathbf{M}_*).$$

Also gehört $I_*^+(\mathbf{x})$ zu der Sphäre \mathcal{S}' , die durch (16.2) gegeben ist. Jeder Punkt $\mathbf{y} \in \mathcal{S}'$ ist das Bild von $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$, wobei \mathbf{x} einer der zwei Schnittpunkte zwischen \mathcal{S} und der Gerade durch \mathbf{M}_* und \mathbf{y} ist. Das zeigt (c), wenn $\mathbf{M}_* \in \alpha$. Es sei nun angenommen, dass $\mathbf{M}_* \notin \alpha$. Es sei \mathcal{S}'' eine $(n-1)$ -Sphäre \mathcal{S}'' , so dass $\mathcal{S} = \mathcal{S}'' \cap \alpha$. Wir haben $I_*^+(\mathcal{S}) = I_*^+(\mathcal{S}'') \cap I_*^+(\alpha)$. Nach (b) und dem Teil von (c), den wir schon bewiesen haben, ist $I_*^+(\mathcal{S})$ die Schnittmenge zwischen einer $(n-1)$ -Sphäre und einer $(k+1)$ -Sphäre oder zwischen einer $(n-1)$ -Ebene und einer $(k+1)$ -Sphäre. In beiden Fällen ist die Schnittmenge eine k -Sphäre nach Hilfsatz 13.5. Schließlich enthält $I_*^+(\mathcal{S})$ den Punkt \mathbf{M}_* nicht, weil $\infty \notin \mathcal{S}$. \square

Folgerung 16.2. Die stereographische Projektion $\Psi : S^{n-1} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ist die Einschränkung der positiven Inversion $I_*^+ : \bar{\mathbb{R}}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^n$ an der Sphäre \mathcal{S}_* mit Mittelpunkt $\mathbf{M}_* = \mathbf{N}$ und Radius $\rho_* = \sqrt{2}$. Insbesondere bildet Ψ Kreise \mathcal{C} mit $\mathbf{N} \in \mathcal{C}$ auf Geraden in $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ab und Kreise \mathcal{C} mit $\mathbf{N} \notin \mathcal{C}$ auf Kreise in $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$.

Beweis. Wenn wir $\mathbf{M}_* = \mathbf{N}$ als Mittelpunkt der gesuchten Sphäre \mathcal{S}_* setzen, dann ist $\bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ durch $\mathbf{u} = -\mathbf{N}$ und $d = 1$ gegeben. Da $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ folgt es aus (16.1), dass $\rho_*^2 = 2$, wie gewünscht. \square