8 Kegelschnitte 17.5.

In disem Kapitel definieren wir die Kegelschnitte, also die Parabel, die Ellipse und die Hyperbel.

Es sei $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene. Es seien eine Gerade $\ell \subset \alpha$ und einen Punkt $\mathbf{B} \in \alpha \setminus \ell$, gegeben. Die Parabel $\mathcal{P}$ mit Brennpunkt $\mathbf{B}$ und Leitlinie ℓ ist die Menge der Punkte $\mathbf{r} \in \alpha$, für die

$$|\mathbf{r} - \mathbf{B}| = \text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell), \tag{8.1}$$

gilt, wobei $\text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell)$ die Länge des Lotes auf ℓ durch $\mathbf{r}$ ist. Wir bemerken, dass $\mathcal{P}$ in der zusammenhängenden Komponente von $\alpha \setminus \ell$ enthalten ist, die auch $\mathbf{B}$ enthält. Wenn $\mathbf{r}$ zur anderen Komponente gehört, schneidet die Strecke zwischen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{r}$ die Gerade ℓ und $\mathbf{r}$ kann nicht (8.1) erfüllen.

Der Punkt $\mathbf{P}$ auf der Parabel mit minimalen Abstand von $\mathbf{B}$ heißt Periapsis. Wir setzen $d := \text{Abstand}(\mathbf{B}, \ell) = 2|\mathbf{P} - \mathbf{B}|$ und $\mathbf{e} \in \alpha \cap S^2$ für den Normalenvektor von ℓ, die in die Halbebene, die $\mathcal{P}$ nicht enthält, gerichtet ist. Also $\ell := \{\mathbf{r} \in \alpha \mid \langle \mathbf{r} - d\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = 0\}$ und $\mathcal{P} \subset \{\mathbf{r} \in \alpha \mid \langle \mathbf{r} - d\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle < 0\}$.

Es seien zwei Punkte $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \alpha$ und eine positive Zahl a mit $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2| \neq 2a$. Wir definieren $c := \frac{1}{2}|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1|$ und $e := \frac{c}{a} \geq 0$. Falls $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2| < 2a$ ist die Ellipse $\mathcal{E}$ mit Brennpunkten $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ und großer Halbachse a die Menge der Punkte $\mathbf{r} \in \alpha$, für die die folgende Gleichung gilt:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{B}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{B}_2| = 2a. \tag{8.2}$$

Der Punkt $\mathbf{M} := \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ heißt Mittelpunkt der Ellipse. Wir setzen $\mathbf{A} := \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$. Der Punkt $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ mit kleinstem Abstand von $\mathbf{B}_2$ heißt Periapsis (bezüglich $\mathbf{B}_2$). Es gilt $|\mathbf{P} - \mathbf{B}_2| = (1 - e)a = a - c$, $|\mathbf{P} - \mathbf{M}| = a$, $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{M}| = c$.

Falls $|\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1| > 2a$ ist der $\mathbf{B}_2$ nähere Ast $\mathcal{H}$ der Hyperbel mit Brennpunkten $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ und reeller Halbachse a die Menge der Punkte $\mathbf{r} \in \alpha$, für die die folgende Gleichung gilt:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{B}_2| - |\mathbf{r} - \mathbf{B}_1| = 2a. \tag{8.3}$$

Der Punkt $\mathbf{M} := \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)$ heißt Mittelpunkt der Hyperbel. Wir setzen $\mathbf{A} := \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1$. Der Punkt $\mathbf{P} \in \mathcal{H}$ mit kleinstem Abstand von $\mathbf{B}_1$ heißt Periapsis (bezüglich $\mathbf{B}_1$). Es gilt $|\mathbf{P} - \mathbf{B}_1| = (e - 1)a = c - a$, $|\mathbf{P} - \mathbf{M}| = a$, $|\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}| = c$. Die Asymptote der Hyperbel sind die zwei Geraden auf α, die durch $\mathbf{M}$ laufen und ein Winkel θ mit $\mathbf{A}$ bilden, wobei $\cos\theta = -\frac{1}{e}$.

Wir schreiben nun die Gleichung von einem Kegelschnitt in $\mathbb{R}^3$ mit Brennpunkt in $\mathbf{0}$.

Satz 8.1. *Es seien $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene durch $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}$ ein Punkt in α und $d \in \mathbb{R}^+$. Die Menge*

$$K(\mathbf{e}, d) := \left\{ \mathbf{r} \in \alpha \;\middle|\; r + \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = d \right\} \tag{8.4}$$

definiert einen Kegelschnitt mit Brennpunkt in $\mathbf{0}$*. Wenn* $e \neq 0$*, gilt*

$$K(\mathbf{e}, d) = \left\{\mathbf{r} \in \alpha \;\middle|\; r = e \cdot \mathrm{Abstand}(\mathbf{r}, \ell),\ \langle \mathbf{r} - \tfrac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}\rangle < 0\right\}, \quad \ell := \left\{\mathbf{r} \in \alpha \;\middle|\; \langle \mathbf{r} - \tfrac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}\rangle = 0\right\}.$$

Wir nennen ℓ *die Leitlinie von* $K(\mathbf{e}, d)$*. Außerdem:*

- *für* $e = 1$ *ist* $K(\mathbf{e}, d)$ *eine Parabel mit Leitlinie* ℓ *und Brennpunkt* $\mathbf{B} = \mathbf{0}$*.*

- *für* $e \neq 1$ *ist* $K(\mathbf{e}, d)$ *eine Ellipse mit* $\mathbf{A} := \mathbf{B}_1$ *und* $\mathbf{0} = \mathbf{B}_2$*, falls* $e < 1$*, und der zu* $\mathbf{0}$ *nähere Ast einer Hyperbel mit* $\mathbf{0} = \mathbf{B}_1$ *und* $\mathbf{A} = \mathbf{B}_2$*, falls* $e > 1$*. Es gibt eine Bijektion zwischen* $(\mathbf{e}, d)$ *und* $(\mathbf{A}, a)$*, wobei* $a \neq A/2$ *die große (bzw. reelle) Halbachse des Kegelschnittes ist:*

$$\begin{cases} a = \dfrac{d}{|1 - e^2|}, \\[2ex] \mathbf{A} = -\dfrac{2d}{1 - e^2}\mathbf{e}, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d = a\left|1 - \dfrac{A^2}{4a^2}\right|, \\[2ex] \mathbf{e} = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{A}}{2a}, & \textit{falls} \ \ e < 1, \\ +\dfrac{\mathbf{A}}{2a}, & \textit{falls} \ \ e > 1, \end{cases} \end{cases} \tag{8.5}$$

Es gilt zusätzlich eine Bijektion zwischen $(\mathbf{e}, a)$ *und* $(\mathbf{A}, d)$*:*

$$d = a|1 - e^2|, \qquad \mathbf{A} = \begin{cases} -2a\mathbf{e}, & \textit{falls} \ \ e < 1, \\ +2a\mathbf{e}, & \textit{falls} \ \ e > 1. \end{cases} \tag{8.6}$$

Wenn $e \neq 0$ *und* $f \in \mathbb{R}$ *der Winkel zwischen der Halbegerade* $\mathbb{R}^+\mathbf{e}$ *und* $\mathbf{r}$ *ist, lässt sich* $K(\mathbf{e}, d)$ *in den entsprechenden Polarkoordinaten auf* $\alpha \setminus \{\mathbf{0}\}$ *als*

$$K(\mathbf{e}, d) = \left\{(r, f) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \;\middle|\; r = \frac{d}{1 + e\cos f}\right\} \tag{8.7}$$

schreiben. Falls $e \geq 1$ *gehört der Winkel* f *zum Intervall* $\big(-\arccos(-e^{-1}), \arccos(-e^{-1})\big)$ *bis auf Vielfachen von* 2π*.*

Beweis. Die Aussage ist unmittelbar für $e = 1$, weil die Gleichung (8.1) zum

$$r = -\langle \mathbf{r} - d\mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle = -\langle \mathbf{e}, \mathbf{r}\rangle + d,$$

wird, wie gewünscht. Es seien nun $\mathbf{A} \in \alpha$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Wenn $A < 2a$ gilt, lautet die Gleichung (8.2) für eine Ellipse mit Brennpunkten $\mathbf{0}$ und $\mathbf{A}$ und große Halbachse a

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}| = 2a - r. \tag{8.8}$$

Wir bemerken, dass $|\mathbf{r} - \mathbf{A}| > r - A > r - 2a$. Daher quadrieren wir (8.8) und bekommen die äquivalenten Gleichungen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}|^2 = (2a - r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{A}\rangle + A^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \;\Leftrightarrow\; 4ar + \langle -2\mathbf{A}, \mathbf{r}\rangle = 4a^2 - A^2.$$

Wir teilen die letzte Gleichung durch $4a$ und bekommen die Formel in (8.4) mit Hilfe der Substitution (8.5). Wenn $A > 2a$ gilt, lautet die Gleichung (8.2) mit $\mathbf{B}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}$ und reeller Halbachse a

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}| = 2a + r. \tag{8.9}$$

Da beide Seiten positiv sind, quadrieren wir (8.9) und bekommen die äquivalenten Gleichungen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{A}|^2 = (2a + r)^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{A} \rangle + A^2 = 4a^2 + 4ar + r^2 \;\Leftrightarrow\; 4ar + \langle 2\mathbf{A}, \mathbf{r} \rangle = A^2 - 4a^2.$$

Wir teilen die letzte Gleichung durch $4a$ und bekommen die Formel in (8.4) mit Hilfe der Substitution (8.5).

Wenn $\mathbf{r} \in \alpha$ haben $d - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle = e\big(\frac{d}{e} - \langle \mathbf{r}, \hat{\mathbf{e}} \rangle\big) = -e\langle \mathbf{r} - \frac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}} \rangle$. Das heißt, dass $K(\mathbf{e}, d)$ in der Halbebene enthalten ist, wo $\langle \mathbf{r} - \frac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}} \rangle$ negativ ist. Aber für $\mathbf{r}$ in dieser Halbebene ist $r = d - \langle \mathbf{e}, \mathbf{r} \rangle$ äquivalent zu $r = e \cdot \text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell)$, weil $-\langle \mathbf{r} - \frac{d}{e}\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}} \rangle = \text{Abstand}(\mathbf{r}, \ell)$. $\square$