7 Dynamik auf $\mathbb{R}^+$: periodische Bahnen 14.5.

Satz 7.1. *Es sei $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ und $[r_0, r_1] \subset \mathbb{R}^+$ mit den Eigenschaften*

$$\bullet\ \ \forall\, r \in (r_0, r_1),\ U(r) < h, \quad \bullet\ \ U(r_0) = h = U(r_1), \quad \bullet\ \ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) < 0,\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_1) > 0. \tag{7.1}$$

Es sei $r_{r_0} : I_{r_0} \to \mathbb{R}^+$ die maximale Lösung von $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r)$ mit $r_{r_0}(0) = r_0$ und $\dot{r}_{r_0}(0) = 0$. Dann $I_{r_0} = \mathbb{R}$ und es gibt eine positive Zeit T so, dass

$$r_{r_0}(T) = r_1, \qquad \dot{r}_{r_0}(t) > 0,\ \forall\, t \in (0, T).$$

Außerdem, für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$r_{r_0}(t) = r_{r_0}(t - 2kT), \qquad r_{r_0}(t) = r_{r_0}(-t + 2kT),$$

sodass die Funktion r_{r_0} von ihrer Einschränkung auf dem Intervall $[0, T]$ vollständig bestimmt ist. Insbesondere besitzt r_{r_0} minimale Periode $2T$. Letztendlich gilt

$$\big\{(r_{r_0}(t), \dot{r}_{r_0}(t)) \ \big|\ t \in \mathbb{R}\big\} = \big([r_0, r_1] \times \mathbb{R}\big) \cap E^{-1}(h). \tag{7.2}$$

Beweis. Die Bahn r_{r_0} besitzt Energie $E(r_{r_0}, \dot{r}_{r_0}) = E(r_0, 0) = h$. Nach Satz 4.4 liegt r_{r_0} in der kompakten Menge $[r_0, r_1]$ und daher gilt $I_{r_0} = \mathbb{R}$. Die Funktion $\dot{r}_{r_0}$ ist monoton steigend um $t = 0$, weil $\ddot{r}_{r_0}(0) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_{r_0}(0)) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_0) > 0$. Deshalb gibt es $t_0 > 0$ mit $\dot{r}_{r_0}(t)$ für alle $(0, t_0] \subset P$ und wir setzen $r_2 := r_{r_0}(\delta_0)$. Es sei nun für $k \geq 3$ eine monoton steigende Folge $r_k \in (r_2, r_1)$ mit $r_k \to r_1$. Wir wenden Hilfsatz 6.1 mit $\rho_0 = r_2$ und $\rho_1 = r_k$ an, und bekommen eine entsprechende monoton steigende Folge von Zeiten $\tau = t_k$. Wir definieren $T = \lim_{k \to +\infty} t_k$. Wir wissen, dass $\dot{r}_{r_0}(t) > 0$ für $t \in (0, T)$ und deshalb

$$\lim_{t \to T} r_{r_0}(t) = r_1.$$

Wir nehmen per Widerspruch an, dass $T = +\infty$. Es existieren $s_1 < r_1$ und $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r) \geq \epsilon$ für alle $r \in [s_1, r_1]$. Es sei $\delta > 0$ die einzige Zeit mit $r_{r_0}(\delta) = s_1$. Dann, $\ddot{r}_{r_0}(t) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(t) \leq -\epsilon$, für alle $t \in [\delta$. Wir schätzen ab:

$$\dot{r}_{r_0}(t) = \dot{r}_{r_0}(\delta) + \int_\delta^t \ddot{r}_{r_0}(\tau)\mathrm{d}\tau \leq \dot{r}_{r_0}(\delta) - (t - \delta)\epsilon,$$

sodass $\dot{r}_{r_0}(t) \leq 0$ für t groß genug. Dieser Widerspruch gibt $T < +\infty$ und somit $r_{r_0}(T) = r_1$

Es seien nun $r'(t) := r_{r_0}(-t)$ und $r''(t) := r_{r_0}(2T - t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $r_{r_0} = r'$ und $r = r''$. Die Funktionen r' und r'' sind beide Lösungen von $\ddot{r} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$. Nach Satz 3.5 genügt es zu merken, dass

$$\begin{aligned} r_{r_0}(0) &= r_{r_0}(-0) = r'(0), & \dot{r}_{r_0}(0) &= 0 = -\dot{r}_{r_0}(-0) = \dot{r}'(0), \\ r_{r_0}(T) &= r_{r_0}(2T - T) = r''(T), & \dot{r}_{r_0}(T) &= 0 = -\dot{r}_{r_0}(2T - T) = \dot{r}''(T). \end{aligned}$$

Wir verketten die zwei Identitäten und finden für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} r_{r_0}(t) &= r_{r_0}(-t) = r_{r_0}(2T - (-t)) = r_{r_0}(2T + t), \\ r_{r_0}(t) &= r_{r_0}(2T - t) = r_{r_0}(-(2T - t)) = r_{r_0}(t - 2T). \end{aligned}$$

Aus einer Iteration dieser zwei Gleichungen finden wir $r_{r_0}(t) = r_{r_0}(t - kT)$ und schließlich $r_{r_0}(t) = r_{r_0}(t - kT) = r_{r_0}(kT - t)$ für alle k gerade. Es bleibt nur die letzte Aussage zu beweisen. Wir sehen, dass $(r, v) \in ([r_0, r_1] \times \mathbb{R}) \cap E^{-1}(h)$ genau dann, wenn $r \in [r_0, r_1]$ und $v = \sqrt{2}\sqrt{h - U(r)}$ oder $v = -\sqrt{2}\sqrt{h - U(r)}$. Es sei $t \in [0, T]$ mit $r_{r_0}(t) = r$. Dann $v = \dot{r}_{r_0}(t)$, wenn $v \geq 0$ ist und $v = \dot{r}_{r_0}(-t)$, wenn $v \leq 0$ ist. $\square$

Aufgabe*. *Beweisen Sie, dass unter den Voraussetzungen von Satz* 7.1*, die Menge*

$$([r_0, r_1] \times \mathbb{R}) \times E^{-1}(h)$$

eine glatte geschlossene Kurve ist, indem Sie zeigen, dass $\operatorname{grad} E(r, v) \neq \mathbf{0}$ *für alle* (r, v)*, die zu dieser Menge gehören.*

Aufgabe*. *Es sei* $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, $r_0, r_1, v_0 \in \mathbb{R}^+$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

$$r_0 < r_1, \quad E(r_0, v_0) = h = E(r_1, 0), \quad \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}(r_1) = 0, \quad U(r) < h, \ \forall\, r \in [r_0, r_1).$$

Wenn $r_{r_0,v_0} : I_{(r_0,v_0)} \to \mathbb{R}^+$ *die maximale Lösung mit Anfang* (r_0, v_0) *ist, gilt*

$$\sup I_{(r_0,v_0)} = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} r_{(r_0,v_0)}(t) = r_1.$$

7.1 Anwendung zum Zentralkraftproblem

Folgerung 7.2. *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine Zentralkraft mit Potential* $\tilde{U}$*. Es seien weiter* $c > 0$ *und* $\tilde{U}_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *das dazugehörende effektive Potential. Wir nehmen* $h \in \mathbb{R}$ *und* $[r_0, r_1] \subset \mathbb{R}^+$ *so, dass die Bedingungen in* (7.1) *von* $\tilde{U}_c$ *erfüllt sind. Es sei* $(r_{r_0}, \theta_{(r_0,\theta_0)}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *eine Lösung von* (5.1) *mit Energie* $h \in \mathbb{R}$ *und* $r_{r_0}(0) = r_0$, $\theta_{(r_0,\theta_0)}(0) = \theta_0$*. Wir definieren*

$$\Theta := \frac{c}{\sqrt{2}} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{h - \tilde{U}_c(r)}} > 0.$$

Dann für alle $k \in \mathbb{Z}$ *und* $t \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = 2k\Theta + \theta_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT), \qquad \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = 2\theta_0 + 2k\Theta - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT).$$

Es folgert daraus, dass die Funktion $\theta_{(r_0,\theta_0)}$ *von ihrer Einschränkung auf dem Intervall* $[0, T]$ *vollständig bestimmt ist und dass*

- $\theta_{(r_0,\theta_0)}(kT) = \theta_0 + k\Theta, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$
- $\lim_{t\to\pm\infty} \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) = \pm\infty.$

Es sei nun $\mathbf{r}_{(r_0,\theta_0)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2_\times$ *die Lösung von* $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, *die Polarkoordinaten* $(r_{r_0}, \theta_{(r_0,\theta_0)})$ *besitzt. Dann* $\mathbf{r}_{(r_0,v_0)}$ *ist periodisch genau dann, wenn es miteinander teilfremde natürliche Zahlen* $a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $\Theta/\pi = a/b$ *existieren. In diesem Fall ist die Periode* $2bT$.

Letztendlich gleicht $\big\{\big(\mathbf{r}_{(r_0,v_0)}(t), \dot{\mathbf{r}}_{(r_0,v_0)}(t)\big) \;\big|\; t \in \mathbb{R},\ \theta_0 \in \mathbb{R}\big\}$ *die Menge*

$$\big\{(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2_\times \times \mathbb{R}^2 \;\big|\; r_0 \le r \le r_1,\ E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h,\ \langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = c\big\}.$$

Beweis. Aus der zweiten Gleichung in (5.1) und dem vorherigen Satz wissen wir, dass

$$\dot{\theta}_{(r_0,\theta_0)}(t) = \dot{\theta}_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT), \quad \dot{\theta}_{(r_0,\theta_0)}(t) = \dot{\theta}_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Wir integrieren diese Gleichungen auf $[0, t]$ und finden

$$\begin{aligned}\theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= \theta_0 + \theta_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT) - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-2kT),\\ \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= \theta_0 - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT) + \theta_{(r_0,\theta_0)}(2kT).\end{aligned} \tag{7.3}$$

Für $t = T$ bekommen wir

$$\begin{aligned}\theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0 &= \theta_{(r_0,\theta_0)}((-2k+1)T) - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-2kT),\\ \theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0 &= \theta_{(r_0,\theta_0)}(2kT) - \theta_{(r_0,\theta_0)}((2k-1)T).\end{aligned}$$

Da $k \in \mathbb{Z}$ beliebig ist, folgt $\theta_{(r_0,v_0)}(kT) = \theta_0 + k(\theta_{(r_0,v_0)}(T) - \theta_0)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir können also (7.3) so umschreiben:

$$\begin{aligned}\theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= 2k(\theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0) + \theta_{(r_0,\theta_0)}(t - 2kT),\\ \theta_{(r_0,\theta_0)}(t) &= 2\theta_0 + 2k(\theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0) - \theta_{(r_0,\theta_0)}(-t + 2kT).\end{aligned}$$

Es bleibt nun zu sehen, dass $\Theta = \theta_{(r_0,\theta_0)}(T) - \theta_0$. Die Einschränkung von r_{r_0} auf $[0, T]$ hat eine Umkehrfunktion $t : [r_0, r_1] \to [0, T]$. Wir rechnen

$$\frac{\mathrm{d}(\theta_{(r_0,\theta_0)} \circ t)}{\mathrm{d}r} = \frac{\dot{\theta}_{(r_0,\theta_0)}}{\dot{r}_{(r_0)}} = \frac{c}{r^2} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{h - \tilde{U}_c(r)}}.$$

Eine Integrierung der obigen Gleichung auf $[r_0, r_1]$ liefert die gewünschte Formel. Da r_{r_0} minimale Periode $2T$ besitzt, hat $\mathbf{r}_{(r_0,v_0)}$ Periode $p \in \mathbb{R}^+$ genau dann, wenn es teilfremde natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $p = 2bT$ und $\theta_{(r_0,v_0)}(t + 2bT) - \theta_{(r_0,v_0)}(t) = 2\pi a$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gibt. Da $\theta_{(r_0,v_0)}(t + 2bT) - \theta_{(r_0,v_0)}(t) = 2b\Theta$ gilt, ist die obige Bedingung gleichbedeutend mit $\Theta = \frac{a}{b}\pi$.

Letztendlich sei es $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2_\times \times \mathbb{R}^2$ mit $r_0 \le r \le r_1$, $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h$ und $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = c$. Wir nehmen $\theta \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{r} = re^{\mathbf{i}\theta}$, und erinnern uns daran, dass $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle \hat{\mathbf{r}} + \frac{c}{r}\, \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ und $E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \tilde{E}_c(r, \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle)$. Nach (7.2) gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\theta_0 \in \mathbb{R}$ mit $r_{r_0}(t_0) = r$, $\dot{r}_{r_0}(t_0) = \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}} \rangle$ und $\theta_{(r_0,\theta_0)}(t_0) = \theta$. Nach Satz 4.9.(ii,iv) haben wir $\mathbf{r}_{(r_0,\theta_0)}(t_0) = \mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}_{(r_0,\theta_0)}(t_0) = \mathbf{v}$. $\square$

Satz 7.3 (Bertrand 1873)**.** *Es sei* $\mathbf{F}$ *eine konservative Zentralkraft. Wenn alle die beschränkten Bahnen mit* $\mathbf{c} \neq 0$ *periodisch sind, besitzt das Potential entweder die Gestalt*

$$\tilde{U}(r) = \mu r^2 \qquad \textit{oder} \qquad \tilde{U}(r) = -\frac{\mu}{r}, \qquad \mu > 0. \qquad \square$$