23 Erste Integrale des n-Körperproblem 12.7

Definition 23.1. Es seien $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ Körper mit konstantem Schwerpunkt $\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{0}$. Der Drehimpuls eines Systems (um seinen Schwerpunkt) ist

$$\mathbf{c} := \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i.$$

Hilfsatz 23.2. *Der Drehimpuls ist ein erstes Integral für* (22.8).

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{c}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i) &= -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \hat{\mathbf{r}}_{ij} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \nu_{ij} f(r_{ij}) \mathbf{r}_i \times \hat{\mathbf{r}}_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j \\
&= \sum_{i<j} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j + \sum_{j<i} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j
\end{aligned}$$

Wenn wir die Namen der Indizen umtauschen, gewinnen wir

$$\sum_{j<i} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j = \sum_{i<j} \frac{\nu_{ji} f(r_{ji})}{r_{ji}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i = -\sum_{i<j} \frac{\nu_{ij} f(r_{ij})}{r_{ij}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{r}_j. \qquad \square$$

Es sei $\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion für f und es sei $U_{ij} := \nu_{ij} \tilde{U} \circ r_{ij} : \Delta^c \to \mathbb{R}$ für alle $i \neq j$. Die potentielle Energie des Systems ist

$$U : \Delta^c \to \mathbb{R}, \qquad U(\mathbf{r}) := \sum_{i<j} U_{ij}.$$

Aufgabe 23.3. *Zeigen Sie, dass das Gravitationspotential aus der Gleichung* (22.1) *die Gestalt $\tilde{U}(r) = -G/r$ besitzt, sodass*

$$U(\mathbf{r}) = -\sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Hilfsatz 23.4. *Wir haben* $\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$. *Insbesondere ist die Kraft* $\mathbf{F}$ *konservativ und die Energie*

$$E : \Delta^c \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}, \qquad E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) := T(\mathbf{v}) + U(\mathbf{r})$$

stellt ein erstes Integral dar.

Beweis. Wir haben $\operatorname{grad} U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r})$ genau dann, wenn $\operatorname{grad}_\ell U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_\ell(\mathbf{r})$ für alle $\ell = 1, \dots, n$. Wir berechnen mit Hilfe der Formel (22.2)

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}_\ell U = \sum_{i<j} \nu_{ij} \operatorname{grad}_\ell(\tilde{U} \circ r_{ij}) = \sum_{i<j} \nu_{ij} f(r_{ij}) \operatorname{grad}_\ell r_{ij} &= \sum_{\ell<j} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} + \sum_{i<\ell} \nu_{i\ell} f(r_{i\ell}) \hat{r}_{\ell i} \\
&= \sum_{\ell<j} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} + \sum_{j<\ell} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} \\
&= \sum_{j\neq\ell} \nu_{\ell j} f(r_{\ell j}) \hat{r}_{\ell j} \\
&= -\mathbf{F}_\ell(\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 23.5. *Es sei $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ eine Lösung des zwei Körpersproblems mit Energie h und Drehimpuls $\mathbf{c}$. Es seien $h_1, \mathbf{c}_1$ und $h_2, \mathbf{c}_2$ die Energien und die Drehimpulsen von $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$, als Lösungen der zwei keplerschen Probleme in* (22.11)*. Zeigen Sie, dass*

$$h_1 = \frac{m_2^2}{m_1^2 + m_2^2} h, \qquad h_2 = \frac{m_1^2}{m_1^2 + m_2^2} h, \qquad h = h_1 + h_2$$

$$\mathbf{c}_1 = \frac{m_2}{m} \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c}_2 = \frac{m_1}{m} \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

Satz 23.6. *Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und es sei angenommen, dass*

$$\liminf_{r\to+\infty} \tilde{U}(r) > -\infty.$$

Es sei $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ eine maximale Lösung von (22.8)*, wobei $t_\infty \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Man definiere für alle $t \in [0, t_\infty)$ die positive Zahl*

$$\rho(t) = \min\{r_{ij}(t) \mid i \neq j\}.$$

Wenn $t_\infty < +\infty$, dann

$$\lim_{t\to t_\infty} \rho(t) = 0.$$

Beweis. Für alle $\epsilon > 0$ betrachten wir die Mengen $M_\epsilon \subset \Delta^c$

$$M_\epsilon := \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n} \;\middle|\; \forall\, i \neq j,\ r_{ij} \geq \epsilon \right\}.$$

Wir zeigen nun, dass es für alle $\epsilon > 0$ und $h \in \mathbb{R}$ ein $t_{\epsilon,h} > 0$ existiert, sodass, wenn $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in (M_\epsilon \times \mathbb{R}^{3n}) \cap E^{-1}(h)$ und $\mathbf{r} : [0, t_1) \to \Delta^c$ die maximale Lösung mit $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}_0$ ist, haben wir die Abschätzung $t_1 \geq t_{\epsilon,h}$. Es sei $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in (M_\epsilon \times \mathbb{R}^{3n}) \cap E^{-1}(h)$. Wenn $\mathbf{r} \in \bar{B}_{\epsilon/4}(\mathbf{r}_0)$, dann $|\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i)_0| \leq \epsilon/4$ für alle i und

$$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \geq |(\mathbf{r}_i)_0 - (\mathbf{r}_j)_0| - |\mathbf{r}_i - (\mathbf{r}_i)_0| - |(\mathbf{r}_j)_0 - \mathbf{r}_j| \geq \epsilon - \epsilon/4 - \epsilon/4 = \epsilon/2.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\bar{B}_{\epsilon/4}(\mathbf{r}_0) \subset M_{\epsilon/2}$. Nach Satz 4.7 gilt

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \frac{\epsilon/4}{\sqrt{h - \min_{\bar{B}_{\epsilon/4}(\mathbf{r}_0)} U}} \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \frac{\epsilon/4}{\sqrt{h - \min_{M_{\epsilon/2}} U}}.$$

Also wir müssen U auf $M_{\epsilon'}$ mit $\epsilon' = \epsilon/2$ nach unten beschränken. Nach Voraussettzung gibt es $C_{\epsilon'} > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\tilde{U}(r) \geq -C_{\epsilon'}$ für alle $r \geq \epsilon'$. Für $\mathbf{r} \in M_{\epsilon'}$ gilt $r_{ij} \geq \epsilon'$ und daher

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{i<j} \nu_{ij} \tilde{U}(r_{ij}) \geq \sum_{i<j} -|\nu_{ij}| C_{\epsilon'}.$$

Schließlich

$$t_1 \geq \sqrt{\frac{\lambda_{\mathbf{M}}}{2}} \frac{\epsilon/4}{\sqrt{h + C_{\epsilon'} \sum_{i<j} |\nu_{ij}|}}.$$ □

Folgerung 23.7. *Wenn* $\mathbf{r} : [0, t_\infty) \to \Delta^c$ *eine maximale Lösung des gravitationellen n-Körperproblems* (22.1) *mit* $t_\infty < +\infty$ *ist, dann* $\rho(t) \to 0$ *für* $t \to t_\infty$. □

Der obige Satz sagt, dass wenn die maximale Lösung nicht für alle Zeite definiert ist, dann der Abstand zwischen zwei der Körper gegen null konvergiert. Wenn $n = 2$ wissen wir, dass die Körper kollidieren.

Wir werden sehen, dass genau so für $n = 3$ passiert. Aus dem Satz von Sundman wird auch folgen, dass wenn alle drei Körper miteinander Kollidieren, dann muss der Drehimpuls verschwinden. Das heißt, dass für das 3-Körperproblem mit nicht verschwindendem Drehimpuls die Körper nur paarweise kollidieren kann. In diesem Fall können wir die Lösung regularisieren und fortsetzen, wie wir für das Keplerproblem gemacht haben.

Schließlich, wenn $n > 3$, ist die Situation ziemlich komplizierter, denn zwei Körper gegen unendlich können laufen und gleichzeitig näher und näher zueinander kommen in endlicher Zeit t_∞.