14 Satz von Moser: die Aussage 11.6

Wir stellen nun die Aussage des Satzes von Moser vor, den wir in der nächsten vier Vorlesungen beweisen werden.

Satz 14.1 (Moser). *Die stereographische Projektion $\Psi : S^3 \to \bar{\mathbb{R}}^3$ bildet eine Bijektion zwischen den Großkreisen γ auf S^3 und den Hodographen $\mathbf{v}$ der Lösungen $\mathbf{r}$ des keplerschen Problems mit $h = -1/2$. Wenn γ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, wird $\mathbf{v} = \Psi \circ \gamma$ nach der exzentrischen Anomalie u parametrisiert.*

Bemerkung 14.2. Man kann den Wert $h = -1/2$ mit einem beliebigen negativen Wert h substituieren. In diesem Fall muss man den Radius ρ der Sphäre im Definitionsbereich von Ψ wählen, sodass $\rho^2 = -\frac{1}{2h}$, und die Hodographen durch $s := \frac{1}{\sqrt{2|h|}}u$.

Wir erklären nun alle die Begriffen in dem obigen Satz.

Definition 14.3. Eine Kurve $\mathbf{x} : I \to \mathbf{R}^n$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $|\dot{\mathbf{x}}(t)| = 1$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 14.4. *Es sei $\mathbf{x}(t) = r(\cos t, \sin t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung des Kreises mit Radius r in $\mathbb{R}^2$. Ist $\mathbf{x}$ nach der Bogenlänge parametrisiert? Wie kann man eine Umparametrisierung $s \mapsto t(s)$ wählen, sodass $s \mapsto \mathbf{x}(t(s))$ nach der Bogenlänge parametrisiert wird?*

Definition 14.5. Es sei S^{n-1} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ und identifizieren $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Wir schreiben $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, z)$ für die Punkte in $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, wobei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann $\mathbf{N} = (0, 1) \in S^{n-1}$ und $\mathbf{S} = (0, -1) \in S^{n-1}$ stellen die Nord- und Südpol dar. Es sei nun $\mathbb{R}^{n-1}$ mit $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ identifiziert.

Definition 14.6. Die stereographische Projektion $\tilde{\Psi} : \mathbb{R}^n \setminus \{z = 1\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ist die glatte Abbildung, die jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $z \neq 1$ den Punkt $\tilde{\Psi}(\mathbf{x})$ zuordnet, wobei $(\tilde{\Psi}(\mathbf{x}), 0)$ auf der Gerade $\mathbf{N} + \mathbb{R}(\mathbf{x} - \mathbf{N})$ liegt. Wir definieren die Einschränkung der stereographischen Projektion auf der Einheitssphäre als die Abbildung $\Psi : S^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$, $\Psi(\mathbf{N}) = \infty$ und $\Psi(\mathbf{x}) = \tilde{\Psi}(\mathbf{x})$, falls $\mathbf{x} \neq \mathbf{N}$.

Satz 14.7. *Wir haben die Formel*

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{y}, z) = \frac{1}{1 - z}\mathbf{y}, \qquad \forall\, (\mathbf{y}, z) \in \mathbb{R}^n,\ z \neq 1.$$

Die Abbildung $\Psi : S^{n-1} \to \bar{\mathbb{R}}^{n-1}$ ist ein Homöomorphismus, dessen Umkehrabbildung $\Phi : \bar{\mathbb{R}}^{n-1} \to S^{n-1}$ durch die folgende Formel definiert ist:

$$\Phi(\infty) = \mathbf{N}, \qquad \Phi(\mathbf{v}) = \Big(\frac{2}{1 + v^2}\mathbf{v}, 1 - \frac{2}{1 + v^2}\Big), \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Beweis. Wir suchen nach $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $t(\mathbf{y}, z) + (1-t)\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Es folgt daraus, dass $tz + 1 - t = 0$. Also $t = \frac{1}{1-z}$ und $\tilde{\Psi}(\mathbf{y}, z) = t\mathbf{y} = \frac{1}{1-z}\mathbf{y}$. Um die Stetigkeit von Ψ zu beweisen, reicht es nach Aufgabe 13.12 die Formel

$$|\Phi(\mathbf{y}, z)| = \frac{y}{1-z} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{1-z} = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \forall\, (\mathbf{y}, z) \in S^{n-1} \setminus \{\mathbf{N}\},$$

wobei wir die Gleichung $y^2 + z^2 = 1$ benutzt haben. Wenn $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, definieren wir $\Phi(\mathbf{v})$ durch die Eigenschaften

- $\Phi(\mathbf{v}) = t(\mathbf{w}, 0) + (1-t)\mathbf{N}, \quad t > 0,$
- $|\Phi(\mathbf{v})|^2 = 1.$

Wir setzen die erste Gleichung in die zweite ein und bekommen

$$t^2v^2 + 1 + t^2 - 2t = 1.$$

Wir lösen nach t und finden $t = \frac{2}{1+v^2}$ und die gewünschte Formel folgt. Die Abbildung Φ ist stetig nach Aufgabe 13.12, weil $\lim_{|\mathbf{v}|\to\infty} \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{N}$. □

Definition 14.8. Ein Großkreis auf S^{n-1} ist die Schnittmenge zwischen eine 2-Ebene α durch $\mathbf{0}$ und S^{n-1}.

Aufgabe 14.9. *Zeigen Sie, dass ein Großkreis den Nordpol enthält genau dann, wenn er den Südpol enthält.*

Wir möchten nun Großkreise nach der Bogenlänge parametrisieren. Wenn $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ eine orthonormale Basis für α ist, dann ist es leicht zu sehen, dass

$$\gamma_\alpha(u) := -\sin u\, \mathbf{e}_1 + \cos u\, \mathbf{e}_2 \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

die gewünschte Parametrisierung liefert. Wenn α nicht in $\mathbb{R}^{n-1}$ enthalten ist, nehmen wir $\mathbf{e}_1$ auf der Gerade $\alpha \cap \mathbb{R}^{n-1}$. Dann $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_3, e)$, wobei $e > 0$. Wenn $e = 1$, dann $\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{e}_2 = \mathbf{N}$. Wenn $e < 1$, dann schreiben wir $\mathbf{f}_1$ für den normierten Vektor mit $\mathbf{e}_3 = e_3\mathbf{f}_1$. Es folgt daraus, dass

$$\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle = 0, \qquad e_3 = \sqrt{1-e^2}.$$

Also bekommen wir die Formel

$$\gamma_\alpha(u) = \Big(-\sin u\, \mathbf{e}_1 + \sqrt{1-e^2}\cos u\, \mathbf{f}_1, e\cos u \Big). \tag{14.1}$$

Definition 14.10. Es sei $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Die antipodale Abbildung $A : \bar{\mathbb{R}}^n \to \bar{\mathbb{R}}^n$ mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ ist auf folgender Weise definiert. Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $A(\mathbf{x})$ der einzige andere Punkt auf der Gerade durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{M}$, der gleichen Abstand zu $\mathbf{M}$ wie $\mathbf{x}$ besitzt. Wir setzen $A(\infty) = \infty$.

Aufgabe 14.11. *Zeigen Sie, dass alle $(n-1)$-Sphären mit Mittelpunkt $\mathbf{M}$ invariant durch A sind. Schreiben Sie anschließend eine Formel für A und zeigen Sie, dass $A(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, falls $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.*

Satz 14.12. *Die Großkreise sind diejenige Kreise auf S^{n-1}, die invariant durch die antipodale Abbildung mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ sind.*

Beweis. Es sei $\mathcal{C}$ ein Kreis auf S^{n-1} mit tragender 2-Ebene α. Es sei angenommen, dass $\mathcal{C}$ ein Großkreis ist. Daher gehört $\mathbf{0}$ zu α und α ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Also $\mathbf{x} \in \alpha$ impliziert $-\mathbf{x} \in \alpha$. Nach der obigen Aufgabe ist $\mathcal{C}$ invariant durch A. Es sei nun umgekehrt angenommen, dass $\mathcal{C}$ invariant durch A ist. Wir nehmen $\mathbf{x} \in \mathcal{C} \subset \alpha$, sodass $-\mathbf{x} \in \mathcal{C} \subset \alpha$. Da α ein affiner Unterraum ist, enthält α die Gerade durch $\mathbf{x}$ und $-\mathbf{x}$. Da der Ursprung $\mathbf{0}$ ein Punkt auf dieser Gerade ist, folgt es, dass $\mathbf{0} \in \alpha$. Deshalb ist $\mathcal{C}$ ein Großkreis. $\square$