

## 13 Der Hodographsatz von Hamilton

### 7.6.

In diesem Abschnitt diskutieren wir einen wichtigen Satz von Hamilton, der besagt, dass die Hodographen der Lösungen des keplerschen Problems entweder Bogen von Kreisen im  $\mathbb{R}^3$ , falls  $\mathbf{c} \neq 0$ , oder Teilmengen von Geraden, falls  $\mathbf{c} = 0$ , sind.

**Definition 13.1.** Es sei  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve. Der **Hodograph** von  $\mathbf{r}$  ist die Geschwindigkeitskurve  $\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Bemerkung 13.2.** Der Hodograph hängt von der Parametrisierung der Kurve  $\mathbf{r}$  und nicht nur vom Bild  $\mathbf{r}(I)$ . Genauer, wenn  $s \mapsto t(s)$  eine Umparametrisierung ist, dann  $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .

**Beispiel 13.3.** Der Hodograph der Kurve  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2/2)$ , die die Parabel  $y = x^2/2$  parametrisiert, ist die Kurve  $\mathbf{v}(t) = (1, 0) + t(0, 1)$ , die die Gerade  $x = 1$  paarmetrisiert.

Der Hodograph der Kurve  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , die die Ellipse  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$  parametrisiert, ist die Kurve  $\mathbf{v}(t) = (-a \sin t, b \cos t) = \mathbf{r}(t + \pi/2)$  die die gleiche Ellipse mit verschobener Zeit parametrisiert.

Der Hodograph der Kurve  $\mathbf{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ , die die Hyperbel  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = 1$  parametrisiert, ist die Kurve  $\mathbf{v}(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$ , die die Hyperbel  $(x/a)^2 - (y/b)^2 = -1$  parametrisiert.

**Definition 13.4.** Es seien  $k$  und  $n$  natürliche Zahlen mit  $k < n$ . Eine  $k$ -Sphäre  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{R}^n$  ist die Menge aller Punkte in einer gewissen  $(k + 1)$ -dimensionalen tragenden Ebene  $\alpha$ , die einen festen Abstand  $\rho$  von einem Punkt  $\mathbf{M}$  in  $\alpha$  besitzen. Die Zahl  $\rho$  heißt Radius und der Punkt  $\mathbf{M}$  Mittelpunkt von  $\mathcal{S}$ . Die Sphäre heißt radial, wenn  $\mathbf{0} \in \alpha$ . Eine 1-Sphäre wird auch Kreis genannt und mit dem Buchstabe  $\mathcal{C}$  gekennzeichnet. Falls  $n = 3$  und  $\alpha$  eine orientierte 2-Ebene ist, orientieren wir den Kreis  $\mathcal{C} \subset \alpha$  gegen den Uhrzeigersinn (bezüglich einer positiven Basis von  $\alpha$ ).

Wir geben die folgende Charakterisierung von Sphären ohne Beweis an.

**Hilfsatz 13.5.** *Zwei Aussagen gelten:*

1. *Jede  $k$ -Sphäre  $\mathcal{S}$  ist die Schnittmenge zwischen der tragenden  $(k + 1)$ -Ebene  $\alpha$  und die  $(n - 1)$ -Sphäre  $\mathcal{S}'$  mit gleichem Radius und Mittelpunkt.*
2. *Es sei  $\mathcal{S}''$  eine  $(n - 1)$ -Sphäre. Wenn  $\alpha_*$  eine  $(k + 1)$ -Ebene und  $\mathcal{S}_*$  eine nicht in  $\mathcal{S}''$  enthaltene  $k$ -Sphäre ist, dann sind  $\mathcal{S}'' \cap \alpha_*$  und  $\mathcal{S}'' \cap \mathcal{S}_*$  entweder die leere Menge, ein Punkt, oder eine  $(k - 1)$ -Sphäre.*

Wir betrachten nun Kreise, nämlich 1-Sphäre. Für Punkte auf ihrer tragenden Ebene kann man die folgende Größe definieren, die von Steiner 1826 eingeführt wurde.

**Definition 13.6.** Es sei  $\mathcal{C}$  ein Kreis mit Mittelpunkt  $\mathbf{M}$  und Radius  $\rho$  in einer Ebene  $\alpha$ . Für jeden Punkt  $\mathbf{P} \in \alpha$  definieren wir die Potenz von  $\mathbf{P}$  bezüglich  $\mathcal{C}$  als

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) := |\mathbf{M} - \mathbf{P}|^2 - \rho^2.$$

Die Potenz ist positiv, wenn  $\mathbf{P}$  außerhalb von  $\mathcal{C}$  liegt. Sie ist null, wenn  $\mathbf{P}$  auf  $\mathcal{C}$  liegt. Sie ist negativ, wenn  $\mathbf{P}$  innerhalb von  $\mathcal{C}$  liegt.

**Hilfsatz 13.7.** Es sei  $g \subset \alpha$  eine Gerade durch  $\mathbf{P}$  die  $\mathcal{C}$  in den Punkten  $\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{Q}_2$  schneidet, wobei  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2$ , wenn  $g$  tangential zu  $\mathcal{C}$  ist. Dann,

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) = \langle \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2 - \mathbf{P} \rangle. \quad (13.1)$$

*Beweis.* Als ersten Schritt zeigen wir, dass die rechte Seite von (13.1) unabhängig von  $g$  ist. Wir betrachten nur den Fall, wobei  $\mathbf{P}$  außerhalb von  $\mathcal{C}$  liegt. Es sei  $g'$  eine weitere Gerade durch  $\mathbf{P}$ , die  $\mathcal{C}$  in den Punkten  $\mathbf{Q}'_1$  und  $\mathbf{Q}'_2$  schneidet. Die 3-Ecke  $\Delta(\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}'_2)$  und  $\Delta(\mathbf{Q}'_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_2)$  sind ähnlich, weil sie die gleichen Winkel besitzen:  $\widehat{\mathbf{Q}_1\mathbf{P}\mathbf{Q}'_2} = \widehat{\mathbf{Q}'_1\mathbf{P}\mathbf{Q}_2}$ , weil  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  und  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}'_1, \mathbf{Q}'_2$  jeweils kollinear sind, und  $\widehat{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}'_2\mathbf{P}} = \widehat{\mathbf{Q}'_1\mathbf{Q}_2\mathbf{P}}$ , weil die Beiden Umfangswinkel zum Bogen zwischen  $\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{Q}'_1$  sind. Das Verhältnis zwischen den Längen der entsprechenden Seite sind also gleich

$$\frac{|\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}|}{|\mathbf{Q}'_1 - \mathbf{P}|} = \frac{|\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}|}{|\mathbf{Q}'_2 - \mathbf{P}|}.$$

Daher gilt

$$\langle \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}, \mathbf{Q}_2 - \mathbf{P} \rangle = |\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}| = |\mathbf{Q}'_1 - \mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}'_2 - \mathbf{P}| = \langle \mathbf{Q}'_1 - \mathbf{P}, \mathbf{Q}'_2 - \mathbf{P} \rangle.$$

Wenn  $g'$  die Gerade, die durch  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$  läuft haben wir

$$|\mathbf{Q}'_1 - \mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}'_2 - \mathbf{P}| = (|\mathbf{M} - \mathbf{P}| - \rho) \cdot (|\mathbf{M} - \mathbf{P}| + \rho) = |\mathbf{M} - \mathbf{P}|^2 - \rho^2 = \text{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}). \quad \square$$

Die mögliche Lagen des Punktes  $\mathbf{P}$  bezüglich  $\mathcal{C}$  sondern einen Bogen auf  $\mathcal{C}$  aus.

**Definition 13.8.** Es seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathbf{P}$  ein Kreis und ein Punkt in der Ebene  $\alpha$ . Der Bogen  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P})$  von  $\mathcal{C}$  über  $\mathbf{P}$  ist definiert als

$$\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) := \mathcal{C} \setminus \{ \mathbf{Q} \in \alpha \mid |\mathbf{Q} - \mathbf{P}|^2 \leq \text{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) \}.$$

Wir bemerken, dass

1. wenn  $\mathbf{P}$  im Inneren von  $\mathcal{C}$  liegt, ist  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) = \mathcal{C}$ ;
2. wenn  $\mathbf{P}$  auf  $\mathcal{C}$  liegt, ist  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) = \mathcal{C} \setminus \{ \mathbf{P} \}$ ;
3. wenn  $\mathbf{P}$  im Äußeren von  $\mathcal{C}$  liegt, ist  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P})$  der Bogen zwischen den zwei Tangenten  $g_1, g_2$  an  $\mathcal{C}$  durch  $\mathbf{P}$ . In diesem Fall scheiden sich die Kreise  $\{ |\mathbf{Q} - \mathbf{P}|^2 \leq \text{Pot}_{\mathcal{C}}(\mathbf{P}) \}$  und  $\mathcal{C}$  in den Berührungspunkten der Tangenten  $g_1, g_2$  senkrecht.

**Bemerkung 13.9.** Die Definitionen von Potenz und Bogen über einem Punkt lassen sich für  $k$ -Sphären  $\mathcal{S}$ ,  $(k+1)$ -Ebenen  $\alpha$  und Punkte  $\mathbf{P}$  mit  $\mathcal{S} \subset \alpha$ ,  $\mathbf{P} \in \alpha$  unmittelbar übertragen. Eine entsprechende Version des Hilfsatzes 13.7 gilt in dieser Allgemeinheit.

**Satz 13.10** (Hamilton). *Es besteht eine Bijektion  $\mathbf{r} \mapsto \mathcal{C}_{\mathbf{r}}$  zwischen der Menge der Lösungen  $\mathbf{r}$  des keplerschen Problems mit  $\mathbf{c} \neq 0$  und der Menge der orientierten radialen Kreise in  $\mathbb{R}^3$ , wenn wir zwei Lösungen mit verschobener Zeitparametrisierung identifizieren. Hier stellt  $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$  der Kreis in der Bewegungsebene von  $\mathbf{r}$  mit Radius  $\rho_{\mathbf{r}}$  und Mittelpunkt  $\mathbf{M}_{\mathbf{r}}$  dar, wobei*

$$\rho_{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{c}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{c} \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}. \quad (13.2)$$

Außerdem gilt es

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) = 2h, \quad (13.3)$$

wobei  $h$  die Energie von  $\mathbf{r}$  ist. Schließlich parametrisiert der Hodograph  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  den Bogen  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0})$  gegen den Uhrzeigersinn.

*Beweis.* Aus Folgerung 10.4 wissen wir, dass  $\mathbf{r}$  von den Vektoren  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{e}$  bis auf Zeitverschiebung eindeutig bestimmt wird. Also genügt es zu zeigen, dass die Abbildung  $(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \mapsto (\alpha_{\mathbf{r}}, \rho_{\mathbf{r}}, \mathbf{M}_{\mathbf{r}})$  eine Bijektion ist, wobei  $\alpha_{\mathbf{r}}$  die durch  $\mathbf{c}$  orientierte Bewegungsebene ist. Wenn  $\mathbf{u} \in S^2$  der Normalenvektor zu  $\alpha_{\mathbf{r}}$  ist, sind die Umkehrformeln durch

$$\mathbf{c} = \frac{\mu}{\rho_{\mathbf{r}}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{e} = -\frac{1}{\rho_{\mathbf{r}}} \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{r}}$$

gegeben. Für die Potenz benutzen wir (9.6):

$$\text{Pot}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) = M_{\mathbf{r}}^2 - \rho_{\mathbf{r}}^2 = \frac{\mu^2}{c^2} (e^2 - 1) = 2h.$$

Wir schreiben  $\hat{\mathbf{r}}(\theta) = \cos \theta \hat{\mathbf{e}} + \sin \theta \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}$ , sodass  $\mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{r}}(\theta) = -\sin \theta \hat{\mathbf{e}} + \cos \theta \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}$ . Wir multiplizieren (9.5) durch  $\mu \mathbf{i} / c$  und bekommen

$$\mathbf{v}(\theta) = \frac{\mu}{c} \left( -\sin \theta \hat{\mathbf{e}} + \cos \theta \mathbf{i} \cdot \hat{\mathbf{e}} \right) + \frac{\mu}{c} \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}. \quad (13.4)$$

Also  $\mathbf{v}$  parametrisiert einen Bogen auf dem Kreis  $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}$  und  $\theta$  stellt den Winkel zwischen  $\mathbf{v} - \mathbf{M}$  und  $\mathbb{R}^+ \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$  gegen den Uhrzeigersinn dar. Wenn  $e < 1$  läuft  $\theta$  auf der ganzen  $\mathbb{R}$ . Außerdem ist  $\text{Pot}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) < 0$  und daher  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_{\mathbf{r}}$ . Wenn  $e = 1$ , läuft  $\theta$  in  $(-\pi, \pi)$ . Außerdem ist  $\text{Pot}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) = 0$  und daher  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) = \mathcal{C}_{\mathbf{r}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ . In diesem Fall für  $\pi$  und  $-\pi$  ergibt die rechte Seite in (13.4) genau  $\mathbf{0}$ . Wenn  $e > 1$ , läuft  $\theta$  in  $(-\theta_e, \theta_e)$ , wobei  $\theta_e = \arccos(-1/e)$ . Außerdem ist  $\text{Pot}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0}) > 0$  und daher ist  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}(\mathbf{0})$  der Bogen zwischen den zwei Berührungspunkte  $\mathbf{Q}_1$  und  $\mathbf{Q}_2$ . Wenn wir  $\varphi$  für den Winkel  $\widehat{\mathbf{0M}_{\mathbf{r}}\mathbf{Q}_2}$  schreiben, gilt  $\cos \varphi = \rho_{\mathbf{r}} / M_{\mathbf{r}} = 1/e$ . Es folgt daraus, dass  $\cos(\pi - \varphi) = -1/e$  und deshalb  $\theta_e = \pi - \varphi$ . Also  $\mathbf{v}$  parametrisiert genau den Bogen  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}}}$ .  $\square$

Wir beschreiben nun die Hodographe der regularisierten Lösungen  $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit verschwindendem Drehimpuls. Zu diesem Zweck definieren wir den erweiterten euklidischen Raum.

**Definition 13.11.** Der erweiterte euklidische  $n$ -Raum ist der topologische Raum

$$\bar{\mathbb{R}}^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\},$$

wobei  $U \subset \bar{\mathbb{R}}^n$  offen ist, entweder wenn  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist oder  $\infty \in U$  und  $\bar{\mathbb{R}}^n \setminus U$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

Wenn  $\mathbf{r}$  einen negative Energie besitzt, dann ist  $\mathbf{r}$  eine  $p$ -periodische Kurve mit  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ . In diesem Fall setzen wir

$$\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^3, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t), & \text{if } t \notin p\mathbb{Z}; \\ \infty, & \text{if } t \in p\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da  $\lim_{t \rightarrow pk} v(t) = \infty$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ , sehen wir, dass  $\mathbf{v}$  eine stetige Abbildung ist. In diesem Fall parametrisiert  $\mathbf{v}$  die ganze erweiterte Gerade  $\bar{\mathbb{R}}\mathbf{e}$  in Richtung  $\mathbf{e}$ .

Es sei nun angenommen, dass  $\mathbf{r}$  eine Energie  $h \geq 0$  besitzt. Wir wählen die Parametrisierung, sodass  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ . In diesem Fall setzen wir,

$$\mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^3, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}(t), & \text{if } t \neq 0; \\ \infty, & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

Die Kurve  $\mathbf{v}$  ist stetig und parametrisiert die Menge  $\bar{\mathbb{R}}\mathbf{e} \setminus \{v^2 \leq 2h\}$ . Bemerken Sie, dass solche Menge homöomorph zu einem offenen Intervall ist.