Differentialgeometrie 1 – Übungszettel 9

Heidelberg, Sommersemester 2019

Gabriele Benedetti Urs Fuchs

Abgabe bis 21.6.2019 um 11 Uhr, Briefkasten 04 im 1.OG, Mathematikon

Aufgaben zum Abgeben

9-1 (3 Punkte) Es seien E, E' zwei Vektorbündel über M. Zeigen Sie, dass es eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von M gibt, die E und E' gleichzeitig trivialisiert. Das heißt: für alle $i \in I$ existieren Trivialisierungen $\chi_i : E_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k$ und $\chi_i' : E'_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^{k'}$. Es seien weiter $A_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_k(\mathbb{R})$ und $A'_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_{k'}(\mathbb{R})$ die Übergangsfunktionen.

Es sei nun $F : E \to E'$ ein Bündelhomomorphismus über M. Das heißt insbesondere, dass $\pi' \circ F = \pi$. Zeigen Sie, dass die glatten Abbildungen $F_i : U_i \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(k', k)$ definiert durch $\chi_i' \circ F \circ \chi_i^{-1}(p, v) = (p, F_i(p) \cdot v)$ für alle $(p, v) \in U_i \times \mathbb{R}^k$ der Relation

$$A'_{ij} \cdot F_i = F_j \cdot A_{ij} \tag{$\star$}$$

genügen.

Es sei nun umgekehrt eine Familie $\{F_i : U_i \to \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(k', k)\}_{i\in I}$ von glatten Abbildungen gegeben, sodass $(\star)$ gilt. Zeigen Sie, dass die F_i einen Bündelhomomorphismus $F : E \to E'$ induzieren. Schließen Sie daraus, dass E und E' isomorph sind, wenn $A_{ij} = A'_{ij}$ gilt.

Schließen Sie daraus, dass $\sigma \in \Gamma(E)$ eine Familie von $\sigma_i : U_i \to \mathbb{R}^k$ induziert mit $A_{ij} \cdot \sigma_i = \sigma_j$ und umgekehrt. *Hinweis: Zeigen Sie, dass $\Gamma(E)$ (als $C^\infty(M)$-Modul) isomorph ist zum Raum der Bündelhomomorphismen zwischen $M \times \mathbb{R}$ und E.*

9-2 (3 Punkte) Es seien V_1 und V_2 zwei Vektorräume. Es seien (e_i), (f_j) Basen für V_1 und V_2 und (e^i), (f^j) die dualen Basen von V_1^* und V_2^*. Zeigen Sie, dass

$$w = \sum_{i,j} w(e^i, f^j) \cdot e_i \otimes f_j, \qquad \forall\, w \in V_1 \otimes V_2.$$

Es seien W_1 und W_2 zwei weitere Vektorräume mit Basen $(g_{i'})$ und $(h_{j'})$. Wenn $F : V_1 \to W_1$ und $G : V_2 \to W_2$ linear sind, finden sie die Koeffizienten $((F \otimes G)_{ij}^{i'j'})$, sodass

$$(F \otimes G)(e_i \otimes f_j) = \sum_{i',j'} (F \otimes G)_{ij}^{i'j'} \cdot g_{i'} \otimes h_{j'}.$$

Es seien nun $E_1 \to M$ und $E_2 \to M$ zwei Vektorbündel. Finden Sie die Übergangsfunktionen von $E_1 \otimes E_2 \to M$ mittels der Übergangsfunktionen von $E_1 \to M$ und $E_2 \to M$.

9-3 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$T_n := \left\{ ([x], v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; v \in \mathbb{R} \cdot x \right\}$$

ein Subbündel von $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ vom Rang 1 ist, das trivial ist über den offenen Mengen $U_i := \mathbb{RP}^n \setminus \{x_i = 0\}$ für $i = 1, \dots, n+1$. *Hinweis: Finden Sie über U_i einen nirgends verschwindenden glatten Schnitt von $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, der in T_n enthalten ist und benutzen Sie dann Hilfsatz 6.30.*

Geben Sie die dazugehörigen Trivialisierungen über U_i und die Übergangsfunktionen über $U_i \cap U_j$ an.

(2 Punkte) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie die Übergangsfunktionen für $(T_n^*)^{\otimes k}$ bezüglich der offenen Überdeckung $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$.

(2 Punkte) Konstruieren Sie einen Isomorphismus zwischen dem Möbiusbündel M und dem Vektorbündel T_1. *Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Bündelhomomorphismus*

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto \Big((\cos \pi x, \sin \pi x), (y \cos \pi x, y \sin \pi x) \Big).$$

zwischen dem trivialen Rang 1 *Bündel über* $\mathbb{R}$ *und dem trivialen Rang* 2 *Bündel über* S^1.