Differentialgeometrie 2 – Übungszettel 8

Heidelberg, Wintersemester 2019/2020

Gabriele Benedetti Kevin Emanuel Wiegand

8-1 Es sei $(M, g, \mathfrak{o}_M)$ eine orientierte PR-Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\lambda : M \to (0, \infty)$ eine Funktion. Zeigen Sie:

$$\mathrm{vol}_{\lambda^2 g} = \lambda^m \mathrm{vol}_g \qquad (\star)$$

Es sei $\mu_R : S^n \to S^n_R$ die Streckung $\mu_R(x) = Rx$, wobei wir S^n und S^n_R als Teilmengen von $\mathbb{R}^{n+1}$ interpretieren. Benutzen Sie die Formel $(\star)$, um zu zeigen

$$\mu_R^* \mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = R^n \mathrm{vol}_{g_{S^n}}.$$

Finden Sie mit Hilfe der Formel $(\star)$ einen Ausdruck für die Volumenform eines verzerrten Produktes $(M \times N, g^M + \lambda^2 g^N)$. Leiten Sie die Formel für $\mathrm{vol}_{g_{\mathbb{R}^m}}$ in Polarkoordinaten her.

8-2 In dieser Aufgabe zeigen wir, dass alle Vektorfelder auf S^n eine Nullstelle besitzen, falls n gerade ist. Es sei per Widerspruch angenommen, dass es ein Vektorfeld $Y \in \mathfrak{X}(S^n)$ ohne Nullstelle gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass Y normiert bezüglich g_{S^n} ist. Es sei $\epsilon > 0$ und $R := \sqrt{1 + \epsilon^2}$.

(a) Betrachten Sie die Abbildung $F : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F(x) = x + \epsilon Y(x)$, wobei wir x und $Y(x)$ als Elemente des $\mathbb{R}^{n+1}$ interpretieren. Zeigen Sie, dass $F(S^n) \subset S^n_R$. Zeigen Sie oder nehmen Sie ohne Beweis an, dass $F : S^n \to S^n_R$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist, falls ϵ klein genug genommen wird.

(b) Zeigen Sie, dass

$$R \int_{S^n_R} \mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = P(\epsilon),$$

wobei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ist.

Hinweis: Mit Hilfe von Aufgabe 8-4 und des Pullbacks durch F gewinnen Sie ein Integral auf S^n. Benutzen Sie dann die explizite Formel des Diffeomorphismus F und der Volumenform $\mathrm{vol}_{g_{S^n_R}}$.

(c) Benutzen Sie Aufgabe 8-1, um zu zeigen

$$R \int_{S^n_R} \mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = c_n \cdot \left(\sqrt{1 + \epsilon^2}\right)^{n+1}, \qquad c_n := \int_{S^n} \mathrm{vol}_{g_{S^n}}$$

(d) Folgern Sie einen Widerspruch aus (b) und (c) wenn n gerade ist.

8-3 Sei M eine orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension m und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld auf M.

(a) Es sei $\omega \in \Gamma(\Lambda^m T^*M)$ eine Volumenform gegeben. Wir definieren die Divergenz von X als die eindeutige Funktion $\mathrm{div}_\omega X : M \to \mathbb{R}$, welche die Identität
$$\mathcal{L}_X \omega = (\mathrm{div}_\omega X)\omega$$
erfüllt. Folgern Sie, dass der Fluss von X die Volumenform ω genau dann erhält, wenn $\mathrm{div}_\omega X = 0$. Benutzen die magische Formel von Cartan, um zu zeigen
$$(\mathrm{div}_\omega X)\omega = \mathrm{d}(\iota_X \omega).$$
Es sei (U, x) eine Karte auf M. Schreiben Sie $\mathrm{div}_\omega X$ auf U mittels der Koordinatendarstellung von ω, X und d.

(b) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M mit Levi-Civita Ableitung ∇. Wir betrachten den Endomorphismus $\nabla X \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ des Tangentialbündels und schreiben $\mathrm{Spur}(\nabla X) : M \to \mathbb{R}$ für seine Spur. Zeigen Sie die Identität:
$$\mathrm{Spur}(\nabla X) = \mathrm{div}_{\mathrm{vol_g}} X.$$
Hinweis: Um die Identität in $p \in M$ zu zeigen, benutzen Sie Koordinaten (U, x) um p, sodass $\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^m}$ eine positive orthonormale Basis in p mit der Eigenschaft $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}(p) = 0$ für alle i, j ist (zum Beispiel Normalkoordinaten (U, x) um p).

Aufgabe zum Vorrechnen

8-4 Es sei $\iota : (S^n_R, g_{S^n_R}) \to (\mathbb{R}^{n+1}, g_{\mathbb{R}^{n+1}})$ die n-dimensionale Sphäre von Radius R im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{vol}_{g_{S^n_R}} = \iota^*\Big(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i x^i \mathrm{d}\widehat{x}^i\Big),$$
wobei $\mathrm{d}\widehat{x}^i := \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i-1} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{n+1}$.

Hinweis: berechnen Sie einen normierten Schnitt des Normalbündels $\mathcal{N}_\iota$ und benutzen dann Formel (5.10) im Skript.